Subject: ....

Year.......... Month. صفحه ..... Date.......... ( )

فهرست

مثال (۵-۱) کتاب تارخ ص ۸۲	۱۱
مثال (۵-۲) کتاب تارخ ص ۸۳	۱۲
مثال میان فصلی کتاب تارخ ص ۹۴	۱۴
سؤال ۷ کتاب تارخ ص ۲۰۵	۱۸
سؤال ۱ کتاب تارخ (پایه ورودی) ص ۱۱۹	۲۰
مثال (۴-۳) کتاب تارخ (بندر تجاری کشتی) ص ۵۷	۲۱
تمرین (۱۰-۲) کتاب نظریه صف (تأثیر دوبرابر کردن λ و μ) ص ۱۷۴	۲۳
تمرین (۳۲-۲) کتاب نظریه صف (کارگاه کوچک شستشوی اتومبیل) ص ۱۸۰	۲۴
تمرین (۱۰-۴) کتاب نظریه صف (رستوران چینی) ص ۲۰۳	۲۵
مثال (۱-۴) کتاب نظریه صف (کاری بی کیو - سوپرمارکت زنجیره ای) ص ۱۷۰	۲۷
تمرین (۱۲-۲) کتاب نظریه صف (امکانات تعمیر و نگهداری برای اتومبیل) ص ۱۷۵	۲۹
مثال (۲-۱) کتاب نظریه صف (آرایشگاه تک نفره) ص ۹۱	۳۰
مثال (۲-۲) کتاب نظریه صف (کلینیک چشم پزشکی) ص ۱۱۲	۳۲
مثال (۲-۳) کتاب نظریه صف (ایستگاه پارس اتومبیل) ص ۱۲۵	۳۴
مثال (۲-۵) کتاب نظریه صف (شرکت تولیدی دبلیو آ فینیش - ماشین چوب بری) ص ۱۳۲	۳۶
تمرین (۴-۱) کتاب نظریه صف (جلسه آخر) ص ۶۸	۳۸
تمرین (۱۸-۳) کتاب نظریه صف (شرکت هواپیمایی) ص ۲۶۱	۳۹
تمرین (۵-۴) کتاب نظریه صف (سیستم صف سری با سه ایستگاه) ص ۲۵۲	۴۱
مثال (۶-۲) کتاب نظریه صف (سالن شانیون و هاری گور) ص ۱۴۱	۴۳
تمرین (۱۱-۲) کتاب نظریه صف (معادن پژوهشی) ص ۱۷۴	۴۵
تمرین (۲۳-۲) کتاب نظریه صف (زومیتقدی بانک) ص ۱۷۷	۴۷
تمرین (۲۴-۲) کتاب نظریه صف (تعمیر و نگهداری کامیون) ص ۱۷۸	۴۹
تمرین (۳۴-۲) کتاب نظریه صف (شرکت نفتی فولرهیر) ص ۱۸۰	۵۱
تمرین (۲۵-۲) کتاب نظریه صف (شرکت کامپیوتر تجهیزات پردازش) ص ۱۷۹	۵۴
تمرین (۴۳-۲) کتاب نظریه صف (خشکشویی که یکبار کار می کند) ص ۱۸۴	۵۶
تمرین (۴۴-۲) کتاب نظریه صف (ادامه خشکشویی قبلی) ص ۱۸۵	۵۹

Subject: 1

Year........ Month........ Date........ ( )

فرمول های پایه :

$L = \lambda . \omega$

$Lq = \lambda . \omega q \quad , \quad \omega = \omega q + \frac{1}{\mu} = \omega q + E(S)$

$\frac{1}{\mu} = E(S) \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda . E(S)$ ← یک سرویس دهنده

$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$ c سرویس دهنده داریم $\qquad \lambda = \frac{1}{E(t)}$ ← ورود

فرمول های مدل M/M/1

$R_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n \quad , n = 1, 2, \ldots$

$P_n = \rho^n . P_0 = (1-\rho)\rho^n$

$P_0 = 1 - \rho$

$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$

$Lq = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

$\boxed{L - Lq = \rho}$

$\omega = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{E(S)}{1 - \rho}$ ($\rho \rightarrow \lambda . E(S)$)

$\omega q = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \omega - E(S) = \frac{\rho . E(S)}{1-\rho}$

Sunwood

درصد مشغول بودن سیستم $= (1 - P_0) \times 100\%$

درصد بیکاری سیستم $= P_0 \times 100\%$

مدت زمان بیکاری سیستم $= \dfrac{\mu}{\mu - \lambda} = \dfrac{1}{1-\rho}$ میانگین طول صف‌های انتظار

احتمال اینکه طول صف در مدل M/M/1 بیش از حد مطلوب باشد:

$P(\text{طول صف} > n) = \rho^{n+2}$

احتمال اینکه بیش از n نفر در سیستم وجود داشته باشد

$P_r\{N \geq n\} = \rho^{n} \quad , n \geq 2$

احتمال اینکه مشتری مدت زمان t در سیستم منتظر باشد (کمتر یا مساوی t)

$w(t) = P[w \leq t] = 1 - e^{-\frac{t}{w}}$

احتمال اینکه مشتری مدت زمان t در صف منتظر باشد. (کمتر یا مساوی t)

$w_q(t) = P[q \leq t] = 1 - \rho e^{-\frac{t}{w}}$

Subject: ۳

Year........ Month........ Date........( )

مدل صف با ظرفیت محدود M/M/1/K

$$P_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} & (\lambda \neq \mu) \quad , \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{k+1} = P_n & (\lambda = \mu) \quad , \rho = 1 \quad , n = 1, 2, \ldots, k \end{cases}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{k+1}} & (\lambda \neq \mu) \, , n = 1, 2, \ldots, k \\ \dfrac{1}{1+k} \quad , & (\lambda = \mu) \, , n = 1, 2, \ldots, k \end{cases}$$

$$L = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} & , \lambda \neq \mu \\ \dfrac{k}{2} & , \lambda = \mu \end{cases}$$

$$\boxed{\rho = \frac{\lambda}{\mu}}$$

فرمول بالای صفر

$$L_q = L - (1 - P_0)$$

تعداد مشتریانی که در واحد زمان می توانند وارد سیستم شوند:

$$\lambda_\alpha = \lambda(1 - P_k)$$

احتمال وارد نشدن

$$W = E(w) = \frac{L}{\lambda_\alpha} = \frac{L}{\lambda(1-P_k)}$$

$$W_q = E_q(w) = \frac{L_q}{\lambda_\alpha}$$

احتمال اینکه سرویس دهنده مشغول باشد برابر است با :

$\rho = \lambda\alpha \,.\, E(s) = \lambda(1-P_K)\,.\,E(S)$

تعداد مشتریانی که در وضعیت تکمیل بودن سیستم (وضعیت n) به آن مراجعه می کنند :

$\lambda \,.\, P_n$

$$q_n = \frac{P_n}{1-P_K} \qquad n = 0, 1, \dots, K-1$$

$$W(t) = P(W \leq t) = 1 - \sum_{n=0}^{K-1} q_n \,.\, P[\mu t, n]$$

$$P[\mu t, n] = \sum_{k=0}^{n} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!}$$

$$W_q(t) = P(q \leq t) = 1 - \sum_{n=0}^{K-2} q_{n+1} \,.\, P[\mu t, n]$$

فرمول های مدل M/M/C

$$\lambda_n = \lambda$$

احتمال اینکه سرویس دهنده مشغول باشد

$$\boxed{\rho = \frac{\lambda}{c\mu}}$$

احتمال اینکه سرویس دهنده بیکار باشد

$$1 - \frac{\lambda}{c\mu}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n = 1, 2, \dots, c-1 \\ c\mu & n \geq c \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!} \times \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}} \right]}$$

$$P_n \begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \times P_0 & 0 \leq n \leq c \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c!\, c^{n-c}} \times P_0 & n > c \end{cases}$$

$$L_q = P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!} \cdot \rho \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + E(S) = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$\boxed{L = \lambda W}$$

Subject: ۸

Year. Month. Date. ( )

مدل صف $M/M/1/K/K$ تعداد مشتری ظرفیت

$$P_0 = \frac{1}{\left[1 + \sum_{n=1}^{K} \frac{K!}{(K-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]}$$

$$P_n = \frac{K!}{(K-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$$

$$L_q = K - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1-P_0)$$

$$L = K - \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0)$$ یا $L_q + (1-P_0)$

$$W = \frac{L}{\lambda \alpha} \quad , \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda \alpha}$$

$$\lambda \alpha = \lambda (K - L)$$

Subject: 9

Year. Month. Date. ( )

مدل صف M/M/C/K/K

این مدل را مدل تعمیر ماشین آلات نیز می نامند. K ماشین و C تعمیرکار

$$R_n = \begin{cases} \dfrac{K!}{(K-n)!\,n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & 0 \leq n \leq C \\[2ex] \dfrac{K!}{(K-n)!\,C^{n-C}\,C!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & C < n \leq K \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{C-1} \dfrac{K!}{(K-n)!\,n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=C}^{K} \dfrac{K!}{(K-n)!\,C^{n-C}\,C!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]}$$

$$P_n = R_n \cdot P_0$$

$$L_q = \sum_{n=C}^{K} (n-C)\,P_n$$

احتمال اینکه n نفر در سیستم نباشند و منتظرند که سرویس بگیرند

سرویس می‌گیرند

$$L = \sum_{n=0}^{C-1} nP_n + L_q + C\left[1 - \sum_{n=0}^{C-1} P_n\right]$$

$$W = \frac{L}{\lambda_\alpha} \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda_\alpha}$$

$$\lambda_\alpha = \lambda(1 - P_K) = \lambda(K - L)$$

Subject: ۱۰

Year. Month. Date. ( )

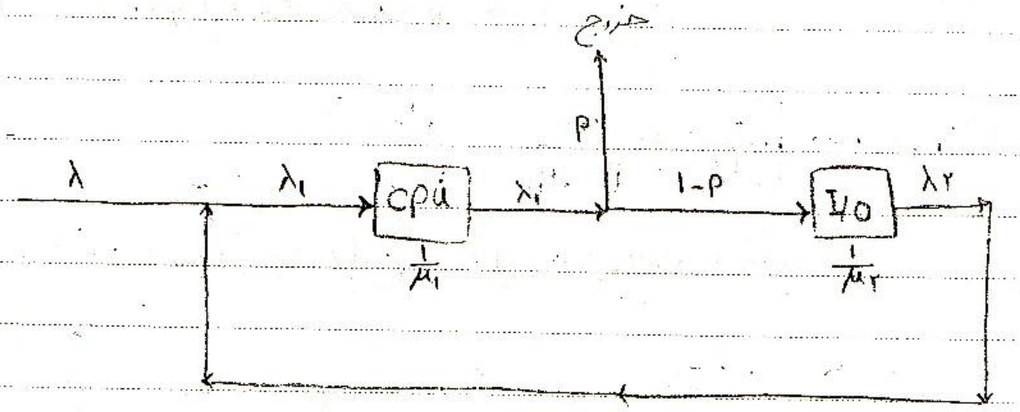
در مدل M/M/C/K/K ، L را می‌توان از فرمول زیر نیز محاسبه نمود

$$L = P_0 \left[\sum_{n=0}^{c-1} n \binom{K}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{c!} \sum_{n=c}^{K} n \binom{K}{n} \frac{n!}{c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]$$

$$\frac{K!}{(K-n)!\,n!}$$

مثال ۵-۱ کتاب تارخ صفحه ۸۲

مدل صفی زیر را درنظر بگیرید. فرض می کنیم فرآیند ورودی پواسن با نرخ λ باشد. زمان سرویس در cpu با میانگین $\frac{1}{\mu_1}$ و زمان سرویس در I/O با میانگین $\frac{1}{\mu_2}$ باشد. برنامه ورودی پس از تکمیل سرویس cpu با احتمال P از سیستم خارج می شود و با احتمال P-1 در صف I/O قرار می گیرد.



$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 = \lambda + \lambda_2 \\ \lambda_2 = (1-P)\lambda_1\end{array}\right\} \lambda_1 = \lambda + (1-P)\lambda_1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 = \frac{\lambda}{P} \\ \lambda_2 = (1-P)\lambda_1\end{array}\right| \lambda_2 = (1-P)\frac{\lambda}{P}$$

بهره‌وری سرویس دهنده‌های I/O و cpu:

$$U_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\frac{\lambda}{P}}{\mu_1} = \frac{\lambda}{P\mu_1}$$

$$U_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = (1-P)\cdot\frac{\lambda}{P\mu_2}$$

میانگین نرخ خروج سیستم $\lambda = \lambda_T = P\lambda_1$

Subject: ۱۲

Year........ Month........ Date........( )

با توجه به روابط صفحه قبل، احتمال وجود n_1 برنامه در صف CPU و n_2 برنامه در صف I_O عبارتست از:

$$P(n_1, n_2) = P(n_1) \cdot P(n_2) = (1-U_1)U_1^{n_1} \cdot (1-U_2)U_2^{n_2}$$

میانگین تعداد برنامه‌ها در سیستم:

$$L = E(N) = E(N_1) + E(N_2) = \frac{U_1}{1-U_1} + \frac{U_2}{1-U_2}$$

میانگین زمان پاسخ یا میانگین زمان انتظار در سیستم

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

مثال ۵-۲ کتاب تاخ صفحه ۸۳

با توجه به مدل صفحه قبل

$E(S_1)$ = ۰٫۲۵ زیرا چون هر بار بعد از ۰٫۲۵ ثانیه کار، CPU یک وقفه اتفاق می‌افتد. بنابراین زمان سرویس CPU ۰٫۲۵ ثانیه است.

$E(S_1) = ۰٫۲۵$ (CPU) ثانیه

$E(S_2) = ۰٫۲$ (I_O) ثانیه

$$\text{تعداد وقفه‌ها} = \frac{۴}{۰٫۲۵} = ۱۶ \Rightarrow P = \frac{1}{۱۶}$$

$$\lambda = \frac{۸۰۰۰}{\underbrace{۱۰ \times ۳۶۰۰}_{\text{ساعت}}} = \frac{۸۰۰۰}{۳۶۰۰۰} = \frac{۲}{۹} \quad \text{برنامه در ثانیه}$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{P} = ۱۶ \times \frac{۲}{۹} = \frac{۳۲}{۹} \quad \text{برنامه در ثانیه}$$

$$\lambda_2 = (1-P)\lambda_1 = \frac{۱۵}{۱۶} \times \frac{۳۲}{۹} = \frac{۱۰}{۳} \quad \text{برنامه در ثانیه}$$

ادامه در ص ۱۳

$$w_0 = \frac{1}{\mu_0 - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{3} - 0.2} = 7.5$$ ثانیه

$$w_1 = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} = \frac{1}{1 - 0.2} = \frac{1}{0.8} = 1.25$$ ثانیه

$$w_2 = \frac{1}{\mu_2 - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{2} - 0.2} = 3.33$$ ثانیه

$$w_3 = \frac{1}{\mu_3 - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{4} - 0.2} = \frac{1}{0.05} = 20$$ ثانیه

$$w = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 7.5 + 1.25 + 3.33 + 20 = 32.1$$

$\boxed{w = 32.1}$ زمان پاسخ سیستم

پس از ارزیابی مجدد و پخش متعادل پردازش های I/O در بین دیسک ها داریم:

$$\lambda' = \lambda = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$E'(S_1) = E'(S_2) \overset{\text{مساوی}}{=} E'(S_3) = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2.33$$

$$E(S_0) = 3 \Rightarrow \mu_0 = \frac{1}{3}$$ زمان سرویس در cpu هیچ تغییری نکرده است

$$\mu'_1 = \mu'_2 = \mu'_3 = \frac{1}{2.33} = 0.429$$

$$w'_0 = \frac{1}{\mu_0 - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{3} - 0.2} = 7.5$$ ثانیه — چون زمان سرویس در cpu تغییر نکرده است

$$w'_1 = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} = \frac{1}{0.429 - 0.2} = 4.36$$

$$w'_1 = w'_2 = w'_3 = 4.36$$ چون $w'_3 = w'_2 = w'_1$ بنابراین

$$w' = w'_0 + w'_1 + w'_2 + w'_3 = 7.5 + (3 \times 4.36) = 20.6$$ ثانیه

$\boxed{w' = 20.6}$

اگر ظرفیت کاری که همان تعداد تقاضاهاست ۲۰ درصد کاهش یابد (یعنی ضرب در ۰/۲ می‌کنیم)

$$0/2 \times \frac{1}{5} = 0/2 \times 0/2 = 0/04$$ مقداری که افزایش می‌یابد

$$\lambda'' = \lambda + 0/04 = \frac{1}{5} + 0/04 = 0/2 + 0/04 = 0/24$$

$$\boxed{\lambda'' = 0/24}$$

$$\mu''_0 = \mu = \frac{1}{3}$$

$$\mu''_1 = \mu''_2 = \mu''_3 = \mu' = \frac{1}{2/33}$$

$$W''_0 = \frac{1}{\mu''_0 - \lambda''} = \frac{1}{\frac{1}{3} - 0/24} = \frac{1}{0/093} = 10/71$$ ثانیه

$$W''_1 = \frac{1}{\mu''_1 - \lambda''} = \frac{1}{\frac{1}{2/33} - 0/24} = \frac{1}{0/189} = 5/28$$ ثانیه

$$W''_1 = W''_2 = W''_3 = 5/28$$ ثانیه

$$W'' = W''_1 + W''_2 + W''_3 = 10/71 + (5/28 * 3) = 26/6$$

$$\boxed{W'' = 26/6}$$

پس از ارزیابی مدل براساس کاهش ۲۰ درصدی ظرفیت کاری زمان پاسخ ۲۶/۶ می‌شود

ادامه در ص ۱۷

Subject: ۱۷

Year........ Month. .... Date. ....( )

اگر cpu ۳۰ درصد سریعتر شود یعنی:

$E(S_0) \times 0/3 = 3 \times 0/3 = 0/9$

$E(S_0)''' = E(S_0) - 0/9 = 3 - 0/9 = 2/1$

$E(S_0)''' = 2/1$ ثانیه

$\mu_0''' = \frac{1}{2/1} = 0/83$ ثانیه

$\mu_1''' = \mu_2''' = \mu_3''' = \frac{1}{2/33}$

$\lambda''' = \lambda'' = 0/24$

$W_0''' = \frac{1}{\mu_0''' - \lambda'''} = \frac{1}{\frac{1}{2/1} - 0/24} = 4/23$

$W_1''' = W_2''' = W_3''' = \frac{1}{\mu_1''' - \lambda''} = \frac{1}{\frac{1}{2/33} - 0/24} = 5/28$ ثانیه

$W''' = W_0''' + W_1''' + W_2''' + W_3''' = 4/23 + (3 \times 5/28) = 20/07 \simeq 21$

پس از افزایش ۳۰ درصدی سرعت cpu، زمان پاسخ برابر 21 می شود

Sunwood

Subject: ۱۸

Year........Month........Date........( )

سؤال ۷ کتاب تارخ صفحه ۲۰۵

افراد با میانگین زمان بین ورودی که ۱۲ دقیقه می باشد وارد باجه تلفن می شوند. طول زمان انجام تلفن به صورت توزیع نمایی با میانگین ۴ دقیقه می باشد. مطلوب است محاسبه

الف) احتمال آنکه شخص وارد مرکز شود و منتظر بماند

ب) میانگین طول صف انتظار

ج) احتمال آنکه یک تقاضا بیش از ۱۰ دقیقه منتظر بماند تا تلفن در اختیارش قرار گیرد.

د) شرکت در نظر دارد یک باجه دیگر ایجاد نماید. البته زمانی که حداقل ۵ دقیقه انتظار جهت استفاده از تلفن باشد. در این صورت میانگین زمان بین ورودی چه مقدار خواهد بود.

حل:

مدل مورد نظر $M/M/1$ است ← میانگین زمان بین ورودی $E(t) = 12$ دقیقه

زمان سرویس $E(S) = 4$ دقیقه

$\lambda = \frac{1}{12}$, $\mu = \frac{1}{4}$ نفر در دقیقه

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \rightarrow \boxed{\rho = \frac{1}{3}}$$

الف) احتمال آنکه شخص وارد مرکز شود و منتظر بماند.

$$P(N \geq 1) = 1 - P(N < 1) = 1 - P_0$$

$$P_0 = 1 - \rho$$

$$P(N \geq 1) = 1 - P_0 = 1 - (1-\rho) = \rho$$

$$\boxed{P(N \geq 1) = \rho = \frac{1}{3}}$$

ب) میانگین طول صف انتظار

$$E(Nq \mid Nq > 0) = Lq = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(\frac{1}{3})^2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

$$\text{یا} \quad = \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1/5$$

Sunwood

ادامه در صفحه ۱۹

ح) احتمال اینکه یک تقاضا بیش از ۱۰ دقیقه منتظر بماند تا تلفن در اختیارش قرار گیرد:

$$P(q>10) = 1-P(q\leqslant 10) = 1-\left[1-\rho e^{-t/w}\right]$$

$$w = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{1/4-1/12} = \frac{1}{2/12} = 6 \Rightarrow \boxed{w=6}$$

$$P(q>10) = \rho e^{-t/w} = \frac{1}{3}e^{-10/6} = \frac{1}{3}e^{-1.67} = 0.0673$$

د) محاسبه زمان بین ورودی (E(t)) در صورتی که حداقل ۵ دقیقه انتظار جهت استفاده از تلفن باشد.

$$w_q \geqslant 5 \qquad w_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \geqslant 5 \Rightarrow \frac{\lambda}{1/4(1/4-\lambda)} \geqslant 5 \Rightarrow \frac{\lambda}{1/16-1/4\,\lambda} \geqslant 5$$

$$\Rightarrow \lambda \geqslant \frac{5}{16}-\frac{5}{4}\lambda \Rightarrow \left(1+\frac{5}{4}\right)\lambda \geqslant \frac{5}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}\lambda \geqslant \frac{5}{16} \Rightarrow \lambda \geqslant \frac{\frac{5}{16}}{\frac{9}{4}} \Rightarrow$$

$$\lambda \geqslant \frac{20}{144} \Rightarrow \boxed{\lambda \geqslant 0.138}$$

$$\lambda = \frac{1}{E(t)} \Rightarrow \frac{1}{E(t)} \geqslant 0.138 \Rightarrow \boxed{E(t) \leqslant 7.24}$$

زمان بین ورودی

Subject: ۲۰

Year. .... Month. .... Date. .... ( )

تشریح

سؤال ۱ کتاب تاها صفحه ۱۹۹

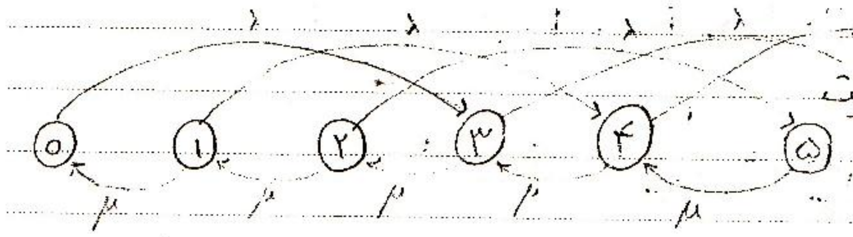
یک سیستم M/M/1 با پارامترهای λ و μ بطوری که در لحظه ورود ۳ مشتری وارد سیستم می‌گردند

مطلوبست

الف) دیاگرام انتقال فضای وضعیت

ب) معادله P_K

ج) معادله P_0



معادلات جریان عبارتند از: نرخ ورودی = نرخ خروجی

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

$$(\lambda+\mu)P_1 = \mu P_2$$

$$(\lambda+\mu)P_2 = \mu P_3$$

$$(\lambda+\mu)P_3 = \lambda P_0 + \mu P_4$$

$$(\lambda+\mu)P_4 = \lambda P_1 + \mu P_5$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$(\lambda+\mu)P_K = \lambda P_{K-3} + \mu P_{K+1} \qquad K \geq 3$$

بنابراین داریم:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \qquad P_4 = \frac{\lambda^4 + 3\lambda^3\mu + 3\lambda^2\mu^2}{\mu^4} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda^2 + \lambda\mu}{\mu^2} P_0$$

$$P_K = \frac{1}{\mu^K}\left[\sum_{i=0}^{K-2} \mu^i \lambda^{K-i}\right]$$

$$P_3 = \frac{\lambda^3 + 2\lambda^2\mu + \mu^2\lambda}{\mu^3} P_0$$

ج) احتمال اینکه یک متقاضی بیش از ۱۰ دقیقه منتظر بماند تا تلفن در اختیارش قرار گیرد:

$$P(q>۱۰) = ۱ - P(q \leqslant ۱۰) = ۱ - \left[۱ - \rho e^{-t/w}\right]$$

$$w = \frac{۱}{\mu - \lambda} = \frac{۱}{۱/۴ - ۱/۱۲} = \frac{۱}{۲/۱۲} = ۶ \Rightarrow \boxed{w = ۶}$$

$$P(q>۱۰) = \rho e^{-t/w} = \frac{۱}{۳} e^{-۱۰/۶} = \frac{۱}{۳} e^{-۱/۶۷} = ۰/۰۶۷۳$$

د) محاسبه زمان بین ورودی (E(t)) در صورتی که حداقل ۵ دقیقه انتظار جهت استفاده از تلفن باشد.

$$w_q \geqslant ۵ \qquad w_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \geqslant ۵ \Rightarrow \frac{\lambda}{۱/۴(۱/۴ - \lambda)} \geqslant ۵ \Rightarrow \frac{\lambda}{۱/۱۶ - ۱/۴\,\lambda} \geqslant ۵$$

$$\Rightarrow \lambda \geqslant \frac{۵}{۱۶} - \frac{۵}{۴}\lambda \Rightarrow \left(۱ + \frac{۵}{۴}\right)\lambda \geqslant \frac{۵}{۱۶}$$

$$\Rightarrow ۹/۴\,\lambda \geqslant \frac{۵}{۱۶} \Rightarrow \lambda \geqslant \frac{\frac{۵}{۱۶}}{\frac{۹}{۴}} \Rightarrow$$

$$\lambda \geqslant \frac{۲۰}{۱۴۴} \Rightarrow \boxed{\lambda \geqslant ۰/۱۳۸}$$

$$\lambda = \frac{۱}{E(t)} \Rightarrow \frac{۱}{E(t)} \geqslant ۰/۱۳۸ \Rightarrow \boxed{E(t) \leqslant ۷/۲۴}$$

زمان بین ورودی

مثال ۴-۳ کتاب تارخ صفحه ۵۷ :

در یک بندر تجاری، کشتی‌ها بعد از ورود بارگیری کرده و سپس از بندر خارج می‌شوند. در هر روز به طور متوسط ۲ کشتی به بندر وارد شده و هر اسکله قادر است به طور متوسط ۳ کشتی را در روز سرویس (بارگیری) نماید. توزیع فواصل ورود و سرویس نمایی فرض می‌شود. پارامترهای زیر را برای موارد یک اسکله و دو اسکله در بندر باشد محاسبه و مقایسه می‌نمائیم.

$\lambda = 2 \quad , \quad \mu = 3$

$$\rho = \begin{cases} \frac{2}{3} & c=1 \\ \frac{2}{6} & c=2 \end{cases}$$

با توجه به اینکه $\rho < 1$ می‌باشد سیستم در وضعیت یکنواخت قرار دارد.

الف) یک اسکله در بندر باشد: $c=1 \rightarrow M/M/1$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}$$

احتمال نبودن کشتی در بندر $= P_0 = 1-\rho = 1-\frac{2}{3} \Rightarrow P_0 = \frac{1}{3}$

احتمال بودن یک کشتی در بندر $= P_1 = (1-\rho)\rho^n = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \Rightarrow P_1 = \frac{2}{9}$

احتمال بودن n کشتی در بندر $(n \geq 2)$ $= P(n \geq 2) = P_0 \times \rho^n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

میانگین تعداد کشتی در بندر $= L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{2}{3-2} \Rightarrow L = 2$

میانگین تعداد کشتی‌های منتظر سرویس $= Lq = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{4}{3(1)} \Rightarrow Lq = \frac{4}{3}$

میانگین تعداد روزهایی که کشتی در بندر است $= \omega = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{1} \Rightarrow \omega = 1$

میانگین تعداد روزهایی که کشتی منتظر دریافت سرویس است $= \omega q = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{2}{3(1)} \Rightarrow \omega q = \frac{2}{3}$

Subject: ۲۲

Year. Month. Date. ( )

ب) ~~۲~~ دو اسکله (زنبر) باشد ← $C=2$ ← $M/M/2$

$$\rho = \frac{\lambda}{C\mu} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \times \frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right]} =$$

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{1} \frac{(\frac{2}{3})^n}{n!} + \frac{(\frac{2}{3})^2}{2} \times \frac{1}{\frac{2}{3}}\right]} = \frac{1}{2} \Rightarrow P_0 = \frac{1}{2}$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_0 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \Rightarrow P_1 = \frac{1}{3}$$

$$P(n \geq 2) = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{c!\, c^{n-c}} \times P_0$$

$$P(n \geq 2) = \frac{(\frac{2}{3})^n}{2! \times 2^{n-2}} \times \frac{1}{2} = \frac{(\frac{2}{3})^n}{\cancel{2} \times \frac{2^n}{2^2}} \times \frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow P(n \geq 2) = (\frac{1}{3})^n$$

$$L_q = P_0 \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \cdot \rho \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{\cancel{(\frac{2}{3})^2}}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{\cancel{(\frac{2}{3})^2}}$$

$$L_q = \frac{1}{12}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{1}{12}}{2} = \frac{1}{24} \Rightarrow W_q = \frac{1}{24}$$

$$L = \lambda \cdot W$$

$$L = 2 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$

Sunwood $W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{3}{8}$

$$\boxed{L = \frac{3}{4}}$$

تمرین ۱۰-۲ کتاب نظریه صف ص ۱۷۴

تأثیر دو برابر کردن λ و μ بر L ، L_q و W در مدل $M/M/1$ چیست؟

حل:

$$\lambda_2 = 2\lambda_1$$
$$\mu_2 = 2\mu_1$$

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{2\lambda_1}{2\mu_1} = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \Rightarrow \boxed{\rho_1 = \rho_2}$$

$$L_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1}, \quad L_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \xrightarrow{\rho_1=\rho_2} \boxed{L_1 = L_2}$$

چون ρ تغییر نمی‌کند در نتیجه L نیز تغییر نمی‌کند.

$$L_1(q) = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1}, \quad L_2(q) = \frac{\rho_2^2}{1-\rho_2} \xrightarrow{\rho_1=\rho_2} \boxed{L_1(q) = L_2(q)}$$

چون ρ تغییر نمی‌کند، بنابراین L_q نیز تغییر نمی‌کند.

$$\left.\begin{array}{l} W_1 = \dfrac{L_1}{\lambda_1} \\[2ex] W_2 = \dfrac{L_2}{\lambda_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} L_2 = L_1 \\ \lambda_2 = 2\lambda_1 \end{array} \Rightarrow W_2 = \frac{L_1}{2\lambda_1} \Rightarrow \boxed{W_2 = \frac{1}{2} W_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} W_1(q) = \dfrac{L(q)}{\lambda_1} \\[2ex] W_2(q) = \dfrac{L_2(q)}{\lambda_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} L_2 = L_1 \\ \lambda_2 = 2\lambda_1 \end{array} \Rightarrow W_2(q) = \frac{L_1(q)}{2\lambda_1} \Rightarrow \boxed{W_2(q) = \frac{1}{2} W_1(q)}$$

$$\boxed{W_2(q) = \frac{1}{2} W_1(q)}$$

Subject: ۲۴

Year. .... Month. .... Date. .... ( )

مدل M/M/1/K

تمرین ۲_۳۲ کتاب نظریه صف صفحه ۱۸۰

یک کارگاه کوچک شستشوی اتومبیل که در آن تا وقتی که کار اتومبیل جلویی به طور کامل پایان نپذیرد، اتومبیل بعدی نمی‌تواند وارد شود. دارای ظرفیت حداکثر ۱۰ اتومبیل در محوطه خود است. (شامل یکی که در حال شستشو است) شرکت دریافته است که ورودیها پواسن با نرخ میانگین ۲۰ اتومبیل در ساعت است و زمانهای سرویس نمایی با میانگین ۱۲ دقیقه است. تعداد متوسط اتومبیل‌هایی که به خاطر پر بودن ظرفیت در هر روز ۱۰ ساعته نمی‌توانند وارد کارگاه شوند، چقدر است؟

$\lambda = 20$ اتومبیل در ساعت

$E(S) = 12$ دقیقه $\Rightarrow \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ ساعت

M/M/1/K

$E(S) = \frac{1}{\mu} \Rightarrow$ ~~$E(S)=\frac{1}{5}$~~ $\mu = 5$ اتومبیل در ساعت

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow P_K = \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{K+1}} \quad , n = 1, 2, \dots, K$$

$$P_{10} = \frac{(1-4)(4)^{10}}{1-4^{11}} = 0/75$$

احتمال اینکه ۱۰ اتومبیل در کارگاه باشد

تعداد اتومبیل‌هایی که به دلیل تکمیل شدن ظرفیت نمی‌توانند وارد صف شوند عبارت است از:

$$\lambda \cdot P_K = 20 \times 0/75 = 15$$ در روز

تعداد اتومبیل‌هایی که به خاطر پر بودن ظرفیت در مدت ۱۰ ساعت نمی‌توانند وارد صف شوند:

$$15 \times 10 = 150$$

Subject: ۲۳

Year....... Month....... Date....... ( )

تمرین ۱۰-۲ کتاب نظریه صف ص ۱۷۴

تأثیر دو برابر کردن λ و μ بر L و L_q و w در مدل $M/M/1$ چیست؟

حل:

$\lambda_2 = 2\lambda_1$

$\mu_2 = 2\mu_1$

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \quad , \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{2\lambda_1}{2\mu_1} = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \Rightarrow \boxed{\rho_1 = \rho_2}$$

$$L_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} \quad , \quad L_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \xrightarrow{\rho_1 = \rho_2} \boxed{L_1 = L_2}$$

چون ρ تغییر نمی‌کند در نتیجه L نیز تغییر نمی‌کند.

$$L_1(q) = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1} \quad , \quad L_2(q) = \frac{\rho_2^2}{1-\rho_2} \xrightarrow{\rho_1 = \rho_2} \boxed{L_1(q) = L_2(q)}$$

چون ρ تغییر نمی‌کند، بنابراین L_q نیز تغییر نمی‌کند.

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \frac{L_1}{\lambda_1} \\ w_2 &= \frac{L_2}{\lambda_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} L_2 &= L_1 \\ \lambda_2 &= 2\lambda_1 \end{aligned} \Rightarrow w_2 = \frac{L_1}{2\lambda_1} \Rightarrow \boxed{w_2 = \frac{1}{2} w_1}$$

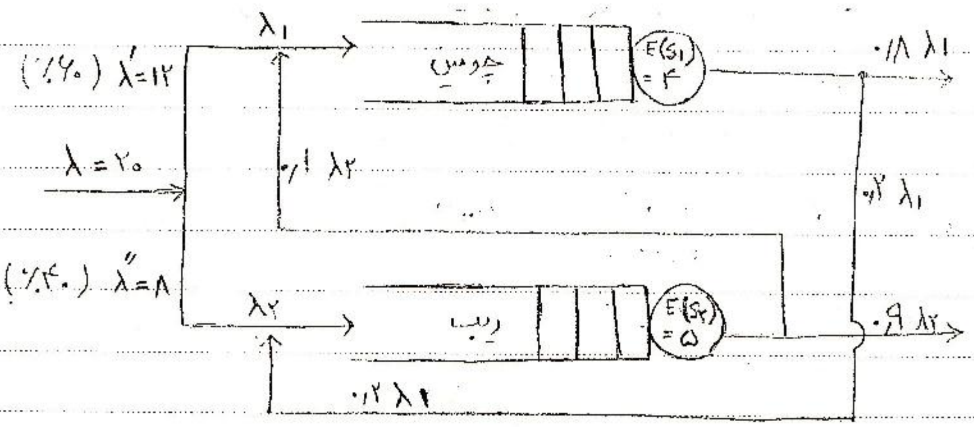
$$\left.\begin{aligned} w_1(q) &= \frac{L(q)}{\lambda_1} \\ w_2(q) &= \frac{L_2(q)}{\lambda_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} L_2 &= L_1 \\ \lambda_2 &= 2\lambda_1 \end{aligned} \Rightarrow w_2(q) = \frac{L_1(q)}{2\lambda_1} \Rightarrow \boxed{w_2(q) = \frac{1}{2} w_1(q)}$$

Sunwood

$\boxed{w_2(q) = \frac{1}{2} w_1(q)}$

تمرین ۱۰-۴ کتاب نظریه صف صفحه ۳۰۳

رستوران چینی دو نوع خوراک سرو می‌کند: چومین و اسپرریبز. دو پنجره جداگانه وجود دارد. یکی برای چومین و یکی برای اسپرریبز. مشتریان مطابق فرآیند پواسن با نرخ میانگین ۲۰ نفر در ساعت وارد می‌شوند. ۶۰ درصد به سراغ چومین می‌روند و ۴۰ درصد به سراغ پنجره ریب. ۲۰ درصد آن‌هایی که از پنجره چومین خرید کرده‌اند، سپس به پنجره ریب می‌روند. ۸۰ درصد دیگر رستوران را ترک می‌کنند. ۱۰ درصد آنهایی که ریب خریده‌اند، سپس به پنجره چومین می‌روند در حالی که ۹۰ درصد دیگر ترک می‌کنند. به‌طور میانگین تکمیل یک سفارش چومین ۴ دقیقه و تکمیل یک سفارش اسپرریبز ۵ دقیقه به طول می‌انجامد. زمان‌های سرویس نمایی هستند. به طور متوسط چند نفر در رستوران هستند؟ متوسط انتظار در هر پنجره چقدر است؟ اگر شخصی هم چومین و هم ریب بخواهد، به طور متوسط چه مدتی را در رستوران صرف می‌کند؟



$\lambda' = 12$ نفر در ساعت (چومین) زمان سرویس پنجره چومین $= E(S_1)$

$\lambda'' = 8$ نفر در ساعت (ریب) زمان سرویس پنجره ریب $: E(S_2)$

$E(S_1) = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$ ساعت $\longrightarrow \mu_1 = 15$ نفر در ساعت

$E(S_2) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ ساعت $\longrightarrow \mu_2 = 12$ نفر در ساعت

ادامه در صفحه ۲۶

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda' + 0.1\,\lambda_2 \\ \lambda_2 = \lambda'' + 0.2\,\lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = 12 + 0.1\,(8 + 0.2\,\lambda_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 12 + 0.8 + 0.02\,\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 - 0.02\,\lambda_1 = 12.8$$

$$\Rightarrow 0.98\,\lambda_1 = 12.8 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{12.8}{0.98} = 13.06$$ (نفر در ساعت) نرخ ورود به گیشه چوبین

$$\lambda_2 = \lambda'' + 0.2\,\lambda_1 \Rightarrow \lambda_2 = 8 + 0.2\,\lambda_1 = 8 + (0.2 \times 13.06)$$

$$\lambda_2 = 8 + 2.612 = 10.612 \Rightarrow \lambda_2 = 10.612$$ (نفر در ساعت) نرخ ورود به گیشه ریبا

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{13.06}{15} = 0.87$$

$$L_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{0.87}{1-0.87} = 6.692$$ متوسط تعداد مشتری (افراد) در صف چوبین

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{10.612}{12} = 0.88$$

$$L_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{0.88}{1-0.88} = 7.333$$ متوسط تعداد مشتری در صف ریبا

$$L = L_1 + L_2 = 6.692 + 7.333 = 14.025$$ متوسط تعداد مشتری در رستوران

$$W_1 = \frac{L_1}{\lambda_1} = \frac{6.692}{13.06} = 0.512 \text{ ساعت}$$ متوسط زمان انتظار در صف چوبین

$$W_2 = \frac{L_2}{\lambda_2} = \frac{7.333}{10.612} = 0.691 \text{ ساعت}$$ متوسط زمان انتظار در صف ریبا

$$W = W_1 + W_2 = 0.512 + 0.691 = 1.203 \text{ ساعت}$$ متوسط زمان انتظار برای شخصی که هم چوبین می‌خواهد هم ریبا می‌خواهد.

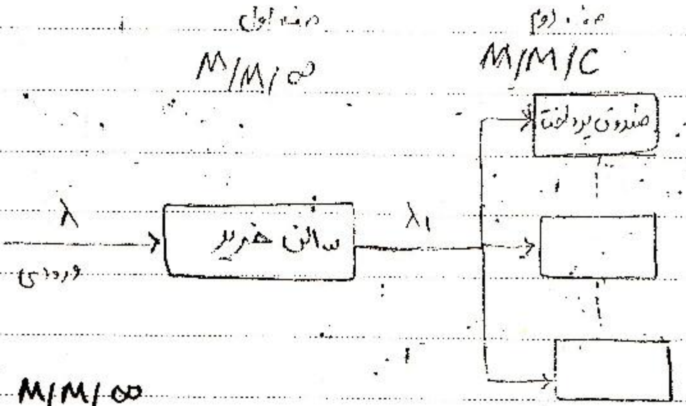
مثال ۱-۴ کتاب نظریه صف صفحه ۲۷۵

کارل می‌کب رئیس یک سوپرمارکت زنجیره‌ای بزرگ شهر ویرجینیا، می‌خواهد طرح جدید یک فروشگاه را به آزمایش بگذارد. مدیریت تخمین می‌زند در طول ساعات اوج شلوغی مشتریان برطبق فرآیند پواسن با میانگین نرخ ۴۰ نفر در ساعت وارد می‌شوند. به طور متوسط هر مشتری ۳/۴ ساعت وقت صرف می‌کند تا خرید را پر کند. زمان‌های پرداخت بدون اینکه پیشخوان پرداخت خاصی اهمیت داشته باشد تقریبا دارای توزیع نمایی با میانگین ۴ دقیقه خواهد بود. می‌کب می‌خواهد از موارد زیر اطلاع حاصل کند.

۱- در طول پریودهای اوج حداقل چه تعداد پیشخوان‌های پرداخت در حال کار مورد نیاز است.

۲- اگر تصمیم گرفته شود که به حداقل تعداد صندوق‌های پرداخت یک را اضافه نماید شود متوسط زمان انتظار در محل نشستن برای پرداخت چه خواهد بود؟ به طور متوسط چه تعداد افراد در کل نگهداری خواهند بود؟ به طور متوسط چند نفر در کل سوپرمارکت خواهد بود؟

حل: این سیستم به صورت یک صف سری با دو ایستگاه مدل بندی می‌شود.



صف اول:
$$\begin{cases} M/M/\infty \\ \lambda = 40 \text{ نفر در ساعت (نرخ ورود)} \\ E(S_1) = \frac{3}{4} \text{ ساعت (زمان سرویس)} \\ \mu_1 = \frac{4}{3} \text{ نفر در ساعت} \end{cases}$$

صف دوم:
$$\begin{cases} M/M/C \\ \lambda_1 = 40 \text{ نفر در ساعت} \\ E(S_2) = 4 \text{ دقیقه} = \frac{1}{15} \text{ ساعت (زمان سرویس)} \\ \mu_2 = 15 \text{ نفر در ساعت} \end{cases}$$

چون در صف M/M/∞ نرخ ورود و خروج باهم برابرند ($\lambda = \lambda_1$)

حل الف) باید تعداد پیشخوان (صندوق) های پرداخت یعنی مقدار C را محاسبه کنیم.

$\rho=\frac{\lambda}{c\mu}<1$ شرط حالت تعادل سیستم

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{c\mu}<1 \Rightarrow c>\frac{\lambda_1}{\mu_1}=\frac{40}{15}\simeq 3 \Rightarrow \boxed{C=3}$$

بنابراین مدل صف دوم M/M/3 است.

حل ب) اگر به تعداد پیشخوان ها یک واحد اضافه شود آن گاه مدل صف دوم به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{cases} M/M/4 \\ \lambda=40 & \text{نفر در ساعت} \\ E(S)=\frac{1}{15} & \text{ساعت} \\ \mu_2=15 & \text{نفر در ساعت} \end{cases} \qquad \rho=\frac{\lambda}{c\mu}=\frac{40}{4\times15}=\frac{2}{3}$$

$$P_0=\frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!}\times\frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right]}=\frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{3}\frac{\left(\frac{40}{15}\right)^n}{n!}+\frac{\left(\frac{40}{15}\right)^4}{4!}\times\frac{1}{1-\frac{4}{4\times15}}\right]}$$

$P_0=0.06$

$$L_q=P_0\,\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!}\cdot\rho\,\frac{1}{(1-\rho)^2}$$

$$L_q=0.06\,\frac{\left(\frac{40}{15}\right)^4}{4!}\times\left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}\Rightarrow L_q=0.76$$ تعداد افراد در صف صندوق های پرداخت

$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{0.76}{40}=0.019$ ساعت $=1.14$ دقیقه — مدت زمان انتظار در صف صندوق های پرداخت

متوسط تعداد افراد در سیستم از مجموع افراد منتظر در هر دو سیستم بدست می آید:

$L_1=\frac{\lambda_1}{\mu_1}=\frac{40}{\frac{4}{3}}=30$ — تعداد افراد در صف M/M/∞

$L_2=\lambda_2\cdot W=\lambda_2\left(W_q+\frac{1}{\mu_2}\right)=40\left(0.019+\frac{4}{60}\right)=3.44$ — تعداد افراد در صف M/M/4

$L=L_1+L_2=30+3.44=33.44$ — تعداد افراد در سیستم

از ۷۵$ ... ؟

Subject: ۲۹

Year...... Month........ Date. ....( )

تمرین ۱۲-۲ کتاب نظریه صف صفحه ۱۷۵

امکانات تعمیر و نگهداری کارگاه اتومبیل دارای توانایی های تعمیرات و نگهداری معمولی برای تنها یک اتومبیل در یک زمان است اتومبیل ها برای این تعمیرات و نگهداری معمولی مطابق فرآیند پواسن با نرخ میانگین ۳ اتومبیل در روز وارد می شوند و زمان سرویس برای انجام این تعمیرات دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{۷}{۲۴}$ روز است. هزینه ثابت کارکرد تجهیزات شرکت ۷۵ دلار در روز است. شرکت برای هر اتومبیل که هر روز در کارگاه بماند ۵ دلار سود از دست می دهد. شرکت با تغییر روشهای خاص و استخدام مکانیک های جابک تر می تواند متوسط زمان سرویس را به $\frac{۱}{۴}$ تقلیل دهد. البته در این صورت هزینه های کاربرد افزایش خواهند یافت. هزینه های کاربرد تا چه مقداری می توانند افزایش یابند پیش از آنکه تغییر از لحاظ اقتصادی، انجام تغییر قابل قبول نباشد.

$\lambda = ۳$ اتومبیل در روز

حل در مدل $M/M/1$

$E(S_1) = \frac{۷}{۲۴}$ روز (زمان سرویس) , $\mu_1 = \frac{۲۴}{۷}$ اتومبیل در روز

$E(S_2) = \frac{۱}{۴}$ روز (زمان سرویس) , $\mu_2 = ۴$ اتومبیل در روز

$$L_1 = \frac{\lambda}{\mu_1 - \lambda} = \frac{۳}{\frac{۲۴}{۷} - ۳} = ۷$$ تعداد اتومبیل در سیستم

$$\omega_1 = \frac{L_1}{\lambda} = \frac{۷}{۳} \text{ روز}$$ میانگین زمان انتظار

$L_1 . w_1 \times ۵\$ = \frac{۴۹}{۳} \times ۵ = ۸۰\$$
سود از دست رفته حالت اول

$$L_1 \times \omega_1 = ۷ \times \frac{۷}{۳} = \frac{۴۹}{۳}$$ اتومبیل در روز معطل می شوند

؟

اکنون سیستم را در حالت اعمال تغییرات بررسی می کنیم:

$$L_2 = \frac{\lambda}{\mu_2 - \lambda} = \frac{۳}{۴ - ۳} = ۳$$ تعداد اتومبیل در سیستم

$$\omega_2 = \frac{L_2}{\lambda} = \frac{۳}{۳} = ۱$$ میانگین زمان انتظار

$L_2 \times w_2$

$$\frac{۴۹}{۳} - ۳ = \frac{۴۰}{۳}$$

$L_2 . w_2 \times ۵\$ = ۱ \times ۳ \times ۵ = ۱۵\$$.
سود از دست رفته حالت دوم

$$\frac{۴۰}{۳} \times ۵ = \frac{۲۰۰}{۳} = ۶۶/۶۷ \text{ دلار}$$ دلار

تا این مقدار می توان هزینه کرد قبل از اینکه از نظر اقتصادی به صرفه نباشد.

$۸۰ + ۷۵ = ۱۵۵$ حالت اول

$۱۵ + ۷۵ = ۹۰$ حالت دوم

$۱۵۵ - ۹۰ = ۶۵$

به اندازه ۶۵ دلار می توانند هزینه کنند

α از کتاب بخوانم

مثال ۱-۲ کتاب نظریه صف صفحه ۹۱

اچ آرکات یک آرایشگاه یکنفره را اداره می کند. مشتریان بر طبق فرآیند پواسن با میانگین نرخ ورود ۵ نفر در ساعت وارد می شوند. زمانهای اصلاح با متوسط زمان اصلاح ۱۰ دقیقه به طور نمایی توزیع می شوند.

الف) محاسبه تعداد متوسط مشتریان در آرایشگاه ← L

ب) محاسبه تعداد متوسط مشتریانی که برای اصلاح منتظر می باشد ← L_q

ج) محاسبه درصدی از زمان که یک مشتری در لحظه ورود بدون اینکه ابتدا انتظار بکشد بتواند کار اصلاحش شروع شود

د) در حال حاضر اتاق انتظار کات تنها برای ۴ نفر جای نشستن دارد. او می خواهد احتمال اینکه یک مشتری به محض ورود نتواند جایی برای نشستن پیدا کند، مجبور باشد که بایستد را پیدا کند.

حل ← مدل $M/M/1$

$\lambda = ۵$ نفر در ساعت $= \frac{۵}{۶۰} = \frac{۱}{۱۲}$ نفر در دقیقه

$E(S) = ۱۰$ دقیقه (زمان سرویس)

$\mu = \frac{۱}{۱۰}$ نفر در دقیقه $= ۶$ نفر در ساعت

الف) محاسبه L (تعداد مشتری در آرایشگاه)

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۱}{۱۰} - \frac{۱}{۱۲}} = \frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۶-۵}{۶۰}} = \frac{۶۰}{۱۲} = ۵$$

ب) محاسبه L_q (تعداد مشتری منتظر اصلاح)

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\frac{۱}{۱۴۴}}{\frac{۱}{۱۰}\left(\frac{۱}{۱۰} - \frac{۱}{۱۲}\right)} = \frac{\frac{۱}{۱۴۴}}{\frac{۱}{۱۰} \times \frac{۱}{۶۰}} = \frac{۶۰۰}{۱۴۴} = \frac{۲۵}{۶} = ۴\frac{۱}{۶}$$

ج) محاسبه P_0

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۱}{۱۰}} = \frac{۱۰}{۱۲} = \frac{۵}{۶}$$

$$P_0 = 1 - \rho = ۱ - \frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۶}$$

$$\frac{۱}{۶} \times ۱۰۰ = ۱۶/۷ \%$$

درصد احتمال اینکه یک مشتری در لحظه ورود بدون انتظار کشیدن کار اصلاحش شروع شود.

ادامه در صفحه ۳۱

Subject: ۳۱

Year........ Month........ Date........ ( )

۱) در حال حاضر ظرفیت اتاق انتظار ۴ نفر است. در این صورت مدل سیستم $M/M/1/K$ می‌شود.

$K = 4 + 1 = 5$ است، یعنی ظرفیت سیستم ۵ است.

$$P_r\{\text{جا برای نشستن نباشد}\} \Rightarrow P_r\{N \geqslant 5\} = \sum_{k=n}^{\infty} (1-\rho) = \frac{(1-\rho)\rho^n}{(1-\rho)} = \rho^n \ ?$$

$$P_r\{N \geqslant 5\} = \rho^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0/402$$

$$0/402 \times 100 \simeq 40\%$$

یعنی حدود ۴۰ درصد از زمان یک مشتری نمی‌تواند جایی برای نشستن پیدا کند.

یا

$$P_r(N \geqslant 5) = 1 - P_r(N \leq 4) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{6-5} = \frac{1}{1} = 1 \text{ ساعت} = \frac{60}{1} \text{ دقیقه}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{5}{6(6-5)} = \frac{5}{6} \text{ ساعت} = 50 \text{ دقیقه}$$

احتمال اینکه یک مشتری ناچار باشد بیش از یک ساعت برای سرویس (اصلاح) منتظر باشد:

$$W_q(t) = P[q > 1] = 1 - (1 - \rho e^{-t/w}) = \rho e^{-t/w} = \frac{5}{6} \times e^{-1/1} = 0/306$$

Sunwood

مثال ۲-۲ کتاب نظریه صف صفحه ۱۱۲

در کلینیک چشم پزشکی بیمارستان کانتی، ۳ متخصص چشم پزشک بیماران را معاینه می‌کنند. یک آزمایش از چشم به طور متوسط ۲۰ دقیقه وقت می‌گیرد. بیماران بر طبق یک فرآیند پواسن با میانگین ۶ نفر در ساعت وارد شده و بر اساس اولین فرد آمده، اولین فرد برای سرویس برای آزمایش انتخاب می‌شوند.

الف) به طور متوسط چند نفر انتظار می‌کشند؟ ← L_q

ب) متوسط زمانی که یک بیمار در کلینیک صرف می‌کند چقدر است؟ ← W

ج) متوسط درصد زمان بیکاری برای هر یک از دکترها چقدر است؟ (احتمال اینکه یک دکتر بیکار باشد)

د) محاسبه احتمال اینکه حداقل یک دکتر بیکار باشد.

حل: مدل $M/M/C$ و $c=3$ ← مدل $M/M/3$

$\lambda = 6$ نفر در ساعت

$E(S) = 20$ دقیقه $= \frac{1}{3}$ ساعت

$\mu = 3$ نفر در ساعت

الف) محاسبه L_q:

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} * \frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right]} = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{2} \frac{(\frac{6}{3})^n}{n!} + \frac{(\frac{6}{3})^3}{3!} \times \frac{1}{1-\frac{6}{9}}\right]}$$

$$= \frac{1}{1+2+2+4} = \frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{P_0 = \frac{1}{9}}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{6}{3\times 3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{2}{3}}$$

$$L_q = P_0 \cdot \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \cdot \rho \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{9} \times \frac{(\frac{6}{3})^3}{3!} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} = \frac{8}{9}$$

$\boxed{L_q = \frac{8}{9}}$ تعداد افرادی که به طور متوسط انتظار می‌کشند.

ادامه در صفحه ۱۱۲

Subject: ۳۳

Year........ Month........ Date........( )

ب) محاسبه W :

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{8}{9}}{6} = \frac{4}{27} \Rightarrow W_q = \frac{4}{27}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{4}{27} + \frac{1}{3} = \frac{13}{27} \Rightarrow W = \frac{13}{27}$$ ساعت $= 28{,}9$ دقیقه

$\boxed{W = 28{,}9}$ دقیقه — متوسط زمانی که یک بیمار در کلینیک صرف می‌کند

ج) درصد احتمال اینکه یک دکتر بیکار باشد.

اگر بیماری نداشته باشیم ← ۳ دکتر بیکار هستند ← P_0

اگر یک بیمار داشته باشیم ← ۲ دکتر بیکار هستند ← P_1

اگر دو بیمار داشته باشیم ← یک دکتر بیکار است ← P_2

یک دکتر از ۳ دکتر بیکار است ←

۲ دکتر از ۳ دکتر بیکار است

احتمال اینکه یک دکتر بیکار باشد $= P_0 + \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2$

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \cdot P_0 \qquad n \leq c$$

$$P_1 = \frac{\left(\frac{6}{3}\right)^1}{1!} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{P_1 = \frac{2}{9}}$$

$$P_2 = \frac{\left(\frac{6}{3}\right)^2}{2!} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{P_2 = \frac{2}{9}}$$

احتمال اینکه یک دکتر بیکار باشد $P_r = \frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{9}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{9}\right) = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} \times 100 = 33{,}33$

د) احتمال اینکه حداقل یک دکتر بیکار باشد

$$P_r = P_0 + P_1 + P_2 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

مثال ۳-۲ کتاب نظریه صف صفحه ۱۲۰

ایستگاه بازرسی اتومبیلی را در نظر بگیرید که دارای ۳ محوطه بازرسی است و هر محوطه تنها می تواند یک اتومبیل را در خود جای دهد. اتومبیل ها به گونی منظری باشد که موقعی که یک محوطه خالی می شود، اتومبیلی که در جلوی صف انتظار است وارد آن می شود. ایستگاه می تواند در هر زمان حداکثر چهار اتومبیل را به حالت انتظار در خود جای دهد. (هفت اتومبیل در ایستگاه). الگوی ورودی پواسن با میانگین یک ورودی در دقیقه است. زمان سرویس نمایی با میانگین ۶ دقیقه است.

الف) تعداد متوسط اتومبیل در سیستم

ب) متوسط زمان انتظار اتومبیل (شامل سرویس)

ج) ارزش انتظاری تعداد اتومبیل در ساعت که به علت تکمیل ظرفیت نمی توانند وارد ایستگاه شوند.

حل: مدل سیستم $M/M/C/K$ است. $M/M/3/7 \leftarrow C=3 , K=7$

$\lambda = 1$ ورودی در دقیقه

$E(S) = 6$ دقیقه , $\mu = \frac{1}{6}$ ورودی در دقیقه

$$\rho = \frac{\lambda}{C\mu} = \frac{1}{3 \times \frac{1}{6}} = 2 \Rightarrow \boxed{\rho = 2}$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{c} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c!} \times \sum_{n=c+1}^{K} \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{n-c}} = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{3} \frac{(6)^n}{n!} + \frac{(6)^n}{3!} \times \sum_{n=4}^{7} (2)^{n-3}}$$

$$P_0 = \frac{1}{1+6+18+36+(36 \times 30)} = \frac{1}{1141} = 0/00088 \Rightarrow \boxed{P_0 = 0/00088}$$

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \rho}{c!(1-\rho)^2} \left(1 - \rho^{K-C} - (K-c)\rho^{K-C}(1-\rho)\right)$$

$$L_q = \frac{(0/00088)(6)^3(2)}{3!(1)} \left(1 - 2^4 - (4)\, 2^4 \times (-1)\right) = 0/06336 \times 49 = 3/09$$

$\boxed{L_q = 3/09}$ اتومبیل

$$L = L_q + c - P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c-n)(\rho c)^n}{n!}$$

$$L = ۳/۰۹ + ۳ - (۰/۰۰۰۸۸) \sum_{n=0}^{۲} \frac{(۳-n)(۶)^n}{n!}$$

$$L = ۳/۰۹ + ۳ - (۰/۰۰۰۸۸) \left[\frac{۳ \times (۱)}{۱} + \frac{(۲) \times (۶)}{۱} + \frac{(۱)(۶)^۲}{۲} \right]$$

$$L = ۶/۰۹ - (۰/۰۰۰۸۸)(۳۳) = ۶/۰۹ \Rightarrow \boxed{L = ۶/۰۹}$$ متوسط تعداد اتومبیل در سیستم

ب) متوسط زمان انتظار اتومبیل

$$W = \frac{L}{\lambda \alpha} = \frac{L}{\lambda(1-P_K)} = \frac{L}{\lambda(1-P_۷)}$$

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c!\, c^{n-c}} \cdot P_0 \qquad c < n \leq K$$

$$P_۷ = \frac{(۶)^۷}{۳!\, ۳^۴} \times (۰/۰۰۰۸۸) = ۵۷۶ \times ۰/۰۰۰۸۸ = ۰/۵۰۶۸۸$$

$$\boxed{P_۷ = ۰/۵۰۶۸۸}$$

$$W = \frac{L}{\lambda(1-P_۷)} = \frac{۶/۰۹}{۱ \times (۱ - ۰/۵۰۶۸۸)} = ۱۲/۰۳$$ دقیقه متوسط زمان انتظار اتومبیل

ج) ارزش انتظار، تعداد اتومبیل در ساعت که نمی‌توانند وارد دستگاه شوند، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$۶۰ \times \lambda P_K = ۶۰ \times P_۷ = ۶۰ \times (۰/۵۰۶۸۸) = ۳۰/۴$$ اتومبیل در ساعت

Subject: ۳۶

Year. Month. Date. ( )

مثال ۵-۲ کتاب نظریه صف صفحه ۱۳۲

شرکت تولیدی دبلیو. آ. فینیش در کارگاه ماشین خود، ۵ ماشین چوب بری دارد. این ماشین ها پریودوار دچار نقص فنی شده و شرکت ۲ تعمیرکار دارد که موقعی که ماشین ها از کار می افتند آنها را سرویس می کند. موقعی که ماشینی راه اندازی می شود، زمان تا نقص فنی بعدی دارای توزیع نمایی با میانگین ۳۰ ساعت است. در کارگاه همیشه به اندازه کافی کار وجود دارد. زمان تعمیر برای هر تعمیرکار دارای توزیع نمایی با میانگین ۳ ساعت است.

الف) متوسط تعداد ماشین هایی که در هر زمان در حال کار هستند چه اندازه است.

ب) ارزش انتظاری زمان از کار افتادگی ماشینی که نیاز به تعمیر دارد چیست. ← W

ج) ارزش انتظاری درصد زمان بیکاری هر تعمیرکار چه مقدار خواهد بود.

حل: مدل سیستم مورد نظر $M/M/C/K/K$ است.

$$\left.\begin{array}{l} C=2 \\ K=5 \end{array}\right\} M/M/2/5/5$$

$\lambda = \frac{1}{30}$ ماشین در ساعت

$E(S) = 3$ ساعت , $\mu = \frac{1}{3}$ ماشین در ساعت

برای محاسبات نیاز به P_0 داریم بنابراین P_0 را محاسبه می کنیم:

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{K!}{(K-n)!\,n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=C}^{K} \frac{K!}{(K-n)!\,C^{n-C}\,C!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{5!}{(5-n)!\,n!}\left(\frac{1}{10}\right)^n + \sum_{n=2}^{5} \frac{5!}{(5-n)!\,2^{n-2}\,2!}} =$$

$$P_0 = \frac{1}{\left[1 + 0/5 + 0/1 + 0/015 + 0/0015 + 0/000075\right]} = 0/62$$

ادامه در صفحه ۳۷

Subject: ۳۷ تعداد ماشین‌های در صف خرابی

Year....... Month. .... Date. ....( )

ت) تعداد متوسط ماشین های درحال کار برابر ($K - L = 5 - L$) خواهد بود. از اینرو باید L (تعداد ماشین های خراب درون سیستم تعمیر) را محاسبه می کنیم:

$$L = P_0 \left[\sum_{n=0}^{c-1} n \binom{K}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{c!} \sum_{n=c}^{K} n \binom{K}{n} \frac{n!}{c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right] \quad ?$$

$$L = ۰/۶۲ \left[\sum_{n=0}^{1} n \binom{5}{n} \left(\frac{1}{10}\right)^n + \frac{1}{2!} \sum_{n=2}^{5} n \binom{5}{n} \frac{n!}{2^{n-2}} \left(\frac{1}{10}\right)^n \right]$$

$$L = ۰/۶۲ \left[1(۰/۵) + 2(۰/۱۰) + 3(۰/۰۱۵) + 4(۰/۰۰۱۵) + 5(۰/۰۰۰۰۷۵) \right]$$

$$\boxed{L = ۰/۴۷}$$

تعداد ماشین های درحال کار $= K - L = 5 - ۰/۴۷ = ۴/۵۳$

ب) ارزش انتظاری زمان از کار افتادگی ماشینی که نیاز به تعمیر دارد عبارت است از:

$$\omega = \frac{L}{\lambda(K-L)} = \frac{۰/۴۷}{\left(\frac{1}{30}\right)(5 - ۰/۴۷)} = \frac{۰/۴۷}{۰/۱۵۰۹} = ۳/۱۱ \text{ ساعت}$$

$$\boxed{W = ۳/۱۱ \text{ ساعت}}$$

ج) ارزش انتظاری درصد زمان بیکاری هر تعمیرکار

زمان بیکاری هر تعمیرکار $= P_0 + \frac{1}{2} P_1$

$$P_n = \frac{K!}{(K-n)!\,n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \times P_0 \qquad 0 \leq n \leq c$$

$$P_1 = \frac{5!}{4!\,1!} \left(\frac{1}{10}\right)^1 \times ۰/۶۲ = \frac{1}{2} \times ۰/۶۲ = ۰/۳۱ \Rightarrow \boxed{P_1 = ۰/۳۱}$$

درصد زمان بیکاری هر تعمیرکار $= \left(P_0 + \frac{1}{2} P_1\right) \times 100 = \left[۰/۶۲ + \frac{1}{2}(۰/۳۱)\right] \times 100 = ۷۸\ \%$

$E(t) = \dfrac{\text{مجموع زمان بین ورودی‌ها}}{\text{تعداد ورودی} - 1}$ زمان بین ورودی‌ها $E(t)$

~~چرا افراد در سیستم~~ L_q ۱۳۲۷ ؟

Subject: ۳۸

Year... Month... Date... ( )

تمرین ۴-۱۰ کتاب نظریه صف صفحه ۶۸ (جلسه آخر)

اقلام با نرخ میانگین یکی در هر ۵ دقیقه وارد یک ایستگاه بازرسی اشغال نشده اولیه می‌شوند - زمان‌های بازرسی ۱۰ قلم اول به ترتیب وقوع

۷ , ۹ , ۱۳ , ۲۴ , ۲۵ , ۳۳ , ۳۴ , ۳۹ , ۴۵ , ۴۷ می‌باشد.

الف) متوسط افراد در سیستم را محاسبه کنید ← L_q

ب) درصد بیکاری ایستگاه بازرسی را محاسبه کنید ← P_0

حل: مدل $M/M/1$

$E(\text{ورود}) = E(t) = ۵$ دقیقه

$\lambda = \dfrac{1}{E(t)} = \dfrac{1}{۵}$ دقیقه

مدت زمان سرویس هر بازرسی ← زمان سرویس = ۷ , ۲ , ۴ , ۱۱ , ۶ , ۳ , ۱ , ۵ , ۶ , ۲

میانگین زمان سرویس $= E(S) = \dfrac{۷+۲+۴+۱۱+۶+۳+۱+۵+۶+۲}{۱۰} = ۴{,}۷$

$\mu = \dfrac{1}{۴{,}۷} = \dfrac{۱۰}{۴۷}$

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{\frac{1}{۵}}{\frac{۱۰}{۴۷}} = \dfrac{۴۷}{۵۰} = ۰{,}۹۴ \Rightarrow \boxed{\rho = ۰{,}۹۴}$

$L_q = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \dfrac{(۰{,}۹۴)^2}{۰/۰۶} = \dfrac{۰/۸۸۳۶}{۰/۰۶} = ۱۴{,}۷۲۶$ متوسط افراد در سیستم

$P_0 = 1-\rho = ۱ - ۰{,}۹۴ = ۰/۰۶ \Rightarrow \boxed{P_0 = ۰/۰۶}$

$۰/۰۶ \times ۱۰۰ = ۶\,\%$ درصد بیکاری ایستگاه بازرسی

$E(S)$ زمان اجرا

$E(S) = \frac{\text{مجموع زمان اجرا}}{\text{تعداد}}$

Subject: ۳۹

Year....... Month....... Date....... ( )

تمرین ۱۸-۳ کتاب نظریه صف صفحه ۲۶۱

یک شرکت هواپیمایی هر دو ساعت سرویس هوایی منظمی بین دو شهر مشخص ارائه می‌کند. معلوم شده که مسافران مطابق فرآیند پواسن با میانگین ۱۸ نفر در ساعت وارد می‌شوند. با مطالعه زمان سنجی ۵۰ مشاهده زیر از زمان اجرا بر حسب دقیقه به دست آمده است: (در کتاب)

الف) به طور متوسط چند نفر در صف منتظر بلیط هستند؟

ب) متوسط انتظار در صف چقدر است؟

حل: مدل $M/M/1$ است $\lambda = 18$ نفر در ساعت $= \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$ نفر بر دقیقه

$$E(S) = \frac{\text{جمع زمان‌های مشاهدات}}{50} = \frac{159/85}{50} = 3/197 \quad \text{دقیقه}$$

$$\mu = \frac{1}{3/197} = \frac{1000}{3197} \quad \text{نفر در دقیقه}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1000}{3197}} = \frac{9591}{10000} = 0/9591 \Rightarrow \boxed{\rho = 0/9591}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(0/9591)^2}{1-0/9591} = 22/49$$ متوسط تعداد افراد منتظر در صف بلیط

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{22/49}{\frac{3}{10}} = 74/96 \quad \text{دقیقه}$$ متوسط انتظار در صف

توجه: اگر در سؤال زمان بین ورودی‌ها را دادند و $E(\text{ورود})$ را خواستند داریم:

$$E(\text{ورود}) = \frac{\text{مجموع زمان بین ورودی‌ها}}{\text{تعداد ورودی‌ها} - 1}$$

Sunwood

X

Subject: ۴۱

Year.............. Month.............. Date..............( )

تمرین ۵-۴ کتاب نظریه صف صفحه ۳۰۲

یک سیستم صف سری با سه ایستگاه (یک سرویس دهنده در هر ایستگاه) با ورودی پواسن با پارامتر λ و سرویس نمایی با پارامترهای به ترتیب μ_1، μ_2، μ_3 را در نظر بگیرید. هیچ حد ظرفیتی برای صف در جلوی دو ایستگاه اول وجود ندارد، ایستگاه سوم حد K (شامل سرویس) وجود دارد. تعداد مورد انتظار در سیستم (هر سه ایستگاه) و زمان مورد انتظار صرف شده در سیستم به وسیله یک مشتری که هر سه مرحله سرویس را تکمیل می‌کند را تعیین کنید.

حل:

مدل ایستگاه اول: $M/M/1$

مدل ایستگاه دوم: $M/M/1$

مدل ایستگاه سوم: $M/M/1/K$

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$$

ایستگاه اول

$$L_1 = \frac{\lambda}{\mu_1 - \lambda} \quad , \quad W_1 = \frac{1}{\mu_1 - \lambda}$$

ایستگاه دوم

$$L_2 = \frac{\lambda}{\mu_2 - \lambda} \quad , \quad W_2 = \frac{1}{\mu_2 - \lambda}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu_3} \qquad L_3 = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}$$

$$\lambda_\alpha = \lambda(1 - P_K)$$

$$W_3 = \frac{L_3}{\lambda_\alpha} = \frac{L_3}{\lambda(1-P_K)}$$

ثابت

$$P_K = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^K \Rightarrow W_3 = \frac{L_3}{\lambda\left(1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\right)}$$

تعداد مورد انتظار در سیستم:

$$L = L_1 + L_2 + L_3$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu_1 - \lambda} + \frac{\lambda}{\mu_2 - \lambda} + \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}$$

ادامه در صفحه ۴۲

X

Subject: ۴۲

Year........ Month........ Date........ ( )

زمان مورد انتظار صرف شده در سیستم به وسیله یک مشتری

$W = W_1 + W_2 + W_3$

$$W = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda} + \frac{L_3}{\lambda\left(1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\right)}$$

ρ^n ?

Sunwood

ص ۸۹

۸۸

Subject: ۴۳

Year........ Month......... Date.........( )

مثال ۶-۲ کتاب نظریه صف صفحه ۱۴۱

سالن شستن و جاروی گود فرآیندی را بر روی ماشین ابداع و پیاده کرده اند که اتومبیل ها را براق می کنند. مشتریان براساس اولین ورودی، اولین فرد برای سرویس انتخاب می شوند. هیچ حدی برروی تعداد مشتریانی که می توانند منتظر بمانند وجود ندارد. ماشین براق کننده اتومبیل می تواند با دو سرعت کار کند. در سرعت پایین به طور متوسط ۴۰ دقیقه وقت می گیرد تا یک اتومبیل براق شود. در سرعت بالا به طور متوسط تنها ۲۰ دقیقه وقت لازم است. مشتریان برطبق فرآیند پواسن با میانگین زمان ورود متوالی ۳۰ دقیقه وارد می شوند. کاسب متوسط زمان انتظار کمک و سیاست اگر دو نفر یا بیشتر در سیستم باشد و اگر ۳ نفر یا بیشتر در سیستم باشد.

$\lambda = \frac{1}{30}$ دقیقه $\qquad \mu_1 = \frac{1}{40}$ دقیقه $\qquad \mu_2 = \frac{1}{20}$ دقیقه $\qquad M/M/1/K$

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{1/30}{1/40} = \frac{4}{3} \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/30}{\frac{1}{20}} = \frac{2}{3}$$

ابتدا برای $K=2$ محاسبه می کنیم

$$P_0 = \left[\frac{1-\rho_1^{K}}{1-\rho_1} + \frac{\rho\rho_1^{K-1}}{1-\rho}\right]^{-1} = \left[\frac{1-(4/3)^2}{1-(4/3)} + \frac{(2/3)(4/3)}{1-(2/3)}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{21}{9} + \frac{24}{9}\right]^{-1} = \frac{1}{5} = 0/20$$

$$L = P_0\left\{\frac{\rho_1\left[1+(K-1)\rho_1^{K} - K\rho_1^{K-1}\right]}{(1-\rho_1)^2} + \frac{\rho\rho_1^{K-1}\left[K-(K-1)\rho\right]}{(1-\rho)^2}\right\} =$$

$$L = \frac{1}{5}\left[\frac{(4/3)\left[1+(4/3)^2 - 2(4/3)\right]}{(-1/3)^2} + \frac{(2/3)(4/3)\left[2-(2/3)\right]}{(1/3)^2}\right] = \frac{12}{5} = 2/40 \text{ اتومبیل}$$

$$\omega = \frac{L}{\lambda} = \frac{2/40}{1/30} = 72 \text{ دقیقه} = \text{۱ ساعت و ۱۲ دقیقه}$$

Subject: ۲۴۳

Year....... Month....... Date....... ( )

برای $K=۳$ بررسی می‌کنیم:

$$P_0 = \left[\frac{1-\rho_1^{k}}{1-\rho_1} + \frac{\rho\rho_1^{k-1}}{1-\rho}\right]^{-1} = \left[\frac{1-(۴/۳)^۳}{1-(۴/۳)} + \frac{(۲/۳)(۴/۳)^۲}{1-(۲/۳)}\right]^{-1} =$$

$$= \left[\frac{۳۷\times۹}{۲۷} + \frac{۳۲}{۲۷}\right]^{-1} = \frac{۳}{۲۴۳} = ۰/۱۳$$

$$L = P_0\left[\frac{\rho_1[1+(k-1)\rho_1^{k} - k\rho_1^{k-1}]}{(1-\rho_1)^۲} + \frac{\rho\rho_1^{k-1}[k-(k-1)\rho]}{(1-\rho)^۲}\right] =$$

$$L = \frac{۳}{۲۴۳}\left[\frac{(۴/۳)[1+۲(۴/۳)^۳ - ۳(۴/۳)^۲]}{(-۱/۳)^۲} + \frac{(۲/۳)(۴/۳)^۲[۳-۲(۲/۳)]}{(۱/۳)^۲}\right]$$

$$L = \frac{۲۰۶}{۶۹} = ۲/۹۹ \quad \text{اتومبیل}$$

$$\omega = \frac{L}{\lambda} = \frac{۲۰۶/۶۹}{۱/۳۰} = \frac{۲۰۶\times۳۰}{۶۹} = ۸۹ \text{ دقیقه} = \text{۱ ساعت و ۲۹ دقیقه}$$

Subject: ۴۵

Year.......Month.......Date.......( )

تمرین ۱۱-۲ کتاب نظریه صف صفحه ۱۷۴

یک معاون پژوهشی فارغ التحصیلان در پیشخوان سفارشات کوتاه در طول ساعات کارش، تنها مسئول پیشخوان است. ورودی که به پیشخوان می آید، دارای توزیع پواسن با میانگین ۱۰ نفر در ساعت است. در هر زمان یک مشتری سرویس می شود و زمان سرویس، توابع نمایی با میانگین ۴ دقیقه است.

الف) احتمال داشتن صف چقدر است؟

ب) طول متوسط صف چقدر است؟

پ) متوسط زمانی که یک مشتری در سیستم صرف می کند چقدر است؟

ت) احتمال اینکه یک مشتری بیش از ۵ دقیقه در صف صرف کند، چقدر است؟

$\lambda = 10$ نفر در ساعت — حل مدل $M/M/1$

$E(S) = 4$ دقیقه $= \frac{1}{15}$ ساعت

$\mu = 15$ نفر در ساعت

الف) احتمال تشکیل صف زمانی است که بیش از یک مشتری در سیستم باشد.

$P(n \geq 2) = 1 - P(n < 2) = 1 - (P_0 + P_1)$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $P_1 = (1-\rho)\rho = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

ب) $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ نفر $\leftarrow$ طول صف

ج) $W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{5}$ ساعت $= 12$ دقیقه — متوسط زمان انتظار مشتری در سیستم

ت) $W_q(t) = P(q > 5) = 1 - P(q \leq 5) = 1 - (1 - \rho e^{-t/W})$

$P(q > 5) = \rho e^{-\frac{5}{12}} = \frac{2}{3} \times e^{-\frac{5}{12}} = 0/439$

ادامه در صفحه ۴۶

Subject: ۴۶

Year........ Month........ Date........( )

ث) معاون مدیر می‌خواهد اوقات بیکاری خود را صرف درجه‌بندی مقالات کند. اگر او بتواند به طور متوسط ۲۲ مقاله را در یک ساعت درجه‌بندی نماید، به طور متوسط در حین انجام شیفت کاری خود، چند مقاله را می‌تواند معدل بگیرد.

تعداد مقالاتی که در یک ساعت درجه‌بندی می‌کند $= ۲۲ \times p_0 = ۲۲ \times \frac{۱}{۳} = ۷٫۳۳$

تعداد مقالاتی که می‌تواند در هر شیفت کاری درجه‌بندی کند $= ۷٫۳۳ \times ۸ = ۵۸٫۶۴$

تمرین ۲.۲۳ کتاب نظریه صف صفحه ۱۷۷

بانک کوچکی دارای دو متصدی یکی برای دریافت وجه و دیگری برای پرداخت وجه است. مشتریان مطابق توزیع پواسن با میانگین ۲۰ نفر در ساعت به هر یک از متصدیان مراجعه می کنند. (نرخ ورودی میانگین کل به بانک ۴۰ نفر در ساعت) زمان سرویس هر یک از متصدیان نمایی با میانگین ۲ دقیقه است. مدیر بانک مسأله تغییر روش را بررسی می کند به طوری که هر یک از متصدیان هم پرداخت کنند و هم دریافت کنند. در این حالت میانگین زمان سرویس ۲،۴ دقیقه خواهد شد سیستم فعلی را با سیستم پیشنهادی با توجه به ارزش انتظاری تعداد کل افراد در بانک، زمان مورد انتظار یک مشتری در بانک و احتمال اینکه یک مشتری بیش از ۵ دقیقه منتظر بماند و زمان بیکاری متوسط متصدیان با هم مقایسه کنید.

حل: مدل سیستم فعلی M/M/1 است.

$\lambda = 20$ نفر در ساعت

$E(s) = 2$ دقیقه $= \frac{1}{30}$ ساعت

$\mu = 30$ نفر در ساعت

$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{20}{30-20} = 2$ نفر تعداد افراد موجود در هر صف (متصدیان)

$L \times 2 = 2 \times 2 = 4$ نفر تعداد کل افراد در سیستم

$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{30-20} = 0/1$ ساعت $= 6$ دقیقه زمان انتظار یک مشتری در بانک

احتمال اینکه یک مشتری بیش از ۵ دقیقه منتظر بماند $= W_q(t) = P(q > 5) = 1 - P(q \leq 5)$

$$= 1 - (1 - \rho e^{-t/w}) = \rho e^{-t/w} = \frac{2}{3} e^{-5/6} = 0/29$$

$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{P_0 = \frac{1}{3}}$

$P_1 = (1-\rho)\rho = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{P_1 = \frac{2}{9}}$

احتمال بیکاری هر متصدی $= P_0 + \frac{1}{2} P_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} = 0/44$

ادامه در صفحه ۴۸

Subject: ۴۸

Year........ Month........ Date........ ( )

مدل سیستم پیشنهادی M/M/2 است

$\lambda = ۴۰$ نفر بر ساعت

$E(S) = ۲{,}۴$ دقیقه $= \frac{1}{۲۵}$ ساعت

$\mu = ۲۵$ نفر بر ساعت

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \times \frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right]} = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{1} \frac{(\frac{۴۰}{۲۵})^n}{n!} + \frac{(\frac{۴۰}{۲۵})^۲}{۲!} \times \frac{1}{1-\frac{۴۰}{۵۰}}\right]}$$

$$= 1 + 1{,}۶ + (1{,}۲۸ \times ۵) = \frac{1}{۹} \Rightarrow \boxed{P_0 = \frac{1}{۹}}$$

$$Lq = P_0 \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \cdot \rho \frac{1}{(1-\rho)^۲} = \frac{1}{۹} \times \frac{(\frac{۴۰}{۲۵})^۲}{۲!} \times \frac{۴۰}{۵۰} \times \frac{1}{(1-\frac{۴۰}{۵۰})^۲} =$$

$$= \frac{1}{۹} \times 1{,}۲۸ \times \frac{۴۰}{۵۰} \times ۲۵ = ۲{,}۸۴ \Rightarrow \boxed{Lq = ۲{,}۸۴}$$

$$wq = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{۲{,}۸۴}{۴۰} = ۰/۰۷۱$$ ساعت

$$w = wq + E(S) = ۰/۰۷۱ + \frac{1}{۲۵} = ۰/۱۱۱$$ ساعت $= ۶{,}۶۶$ دقیقه

زمان انتظار یک مشتری $= w = ۶{,}۶۶$ دقیقه

تعداد افراد در سیستم $L = \lambda \cdot w = ۴۰ \times ۰/۱۱۱ = ۴{,}۴۴$ نفر

احتمال اینکه یک مشتری بیش از ۵ دقیقه منتظر بماند $= wq(t) = P(q > ۵) = 1 - P(q \leq ۵)$

$$= 1 - (1 - \rho e^{-t/w}) = \rho e^{-t/w} = \frac{۴۰}{۵۰} \times e^{-۵/۶{,}۶۶} = ۰/۳۸$$

Sunwood

Subject: ۴۹

Year........ Month........ Date........ ( )

تمرین ۲-۲۴ کتاب نظریه صف صفحه ۱۷۸

شرکت های توترابت بایستی کار کردن از دو نوع کارگاه های سرویس برای تعمیر و نگهداری کامیون هایش انتخاب کند. کامیون ها مطابق توزیع پواسن با نرخ میانگین یکی در هر ۴۰ دقیقه وارد می شوند. در نوع اول کارگاه، دو امکان بطور موازی کار می کنند و هر یک از این امکانات می توانند به یک کامیون به طور متوسط در هر ۳۰ دقیقه سرویس ارائه دهد. در نوع دوم تنها یک امکان وجود دارد، لکن می تواند به طور متوسط در ۱۵ دقیقه یک کامیون را سرویس کند.

الف) بطور متوسط چند کامیون در هریک از دو نوع امکانات خواهد بود؟

ب) بطور متوسط یک کامیون چه مدت در هریک از دو نوع امکانات صرف خواهد کرد؟

پ) مدیریت محاسبه کرده است که هر دقیقه که یک کامیون در کارگاه صرف کند، سهم سود به اندازه ۲ دلار کم می کند. هزینه عملیاتی کارگاه های دو امکان یک دلار در دقیقه است. هزینه عملیاتی در هر دقیقه برای کارکرد نوع دوم (تنها یک امکان) چقدر باشد تا اختلافی بین دو نوع کارگاه موجود نباشد؟

حل: مدل نوع اول $M/M/2$ است.

$\lambda = \frac{1}{40}$ کامیون در دقیقه

$\mu = \frac{1}{30}$ کامیون در دقیقه $\qquad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4}$

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \times \frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right]} = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{1} \frac{(\frac{3}{4})^n}{n!} + \frac{(\frac{3}{4})^2}{2!} \times \frac{1}{1-\frac{3}{8}}\right]}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{32} \times \frac{8}{5}} = \cancel{5}/45 \Rightarrow \boxed{P_0 = /45}$$

$$L_q = P_0 \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \cdot \rho \frac{1}{(1-\rho)^2} = (/45) \cdot \frac{(\frac{3}{4})^2}{2!} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{(1-\frac{3}{8})^2} =$$

$$= (/45) \times \frac{9}{32} \times \frac{3}{8} \times \frac{64}{25} = 0/1215 \Rightarrow \boxed{L_q = 0/1215}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0/1215}{\frac{1}{40}} = 4/86$$ دقیقه

Sunwood

ادامه در صفحه ۵۰

Subject: ۵۰

Year........ Month........ Date........ ( )

زمان انتظار هر کامیون $W = W_q + E(S) = 4.86 + 30 = 34.86$ دقیقه

متوسط تعداد کامیون $L = \lambda . W = \frac{1}{40} \times 34.86 = 0.87$ کامیون

کل هزینه کارگاه نوع اول $= (2+1) \times L \times W = 3 \times 0.87 \times 34.86 = 90.9846$ دلار

مدل نوع دوم $M/M/1$ است، $\lambda = \frac{1}{40}$ کامیون در دقیقه

$\mu = \frac{1}{15}$ کامیون در دقیقه

متوسط تعداد کامیون $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{15} - \frac{1}{40}} = \frac{24}{40} = 0.6$

زمان انتظار هر کامیون $W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{15} - \frac{1}{40}} = 24$ دقیقه

کل هزینه کارگاه نوع دوم $= (2+x) \times L \times W = 90.9846$ دلار

$= (2+x) \times 0.6 \times 24 = 90.9846$

$= (2+x) \times 14.4 = 90.9846 \Rightarrow 28.8 + 14.4x = 90.9846$

$= 14.4x = 62.1846 \Rightarrow x = 4.3184$ دلار

هزینه عملیاتی در هر دقیقه برای کارگاه نوع دوم ۴٫۳۱۸۴ $ است.

Sunwood

زمان انتظار هر کامیون $\quad W = W_q + E(S) = ۴/۸۶ + ۳۰ = ۳۴/۸۶$ دقیقه

متوسط تعداد کامیون $\quad L = \lambda \cdot W = \frac{1}{۴۰} \times ۳۴/۸۶ = ۰/۸۷$ کامیون

دلار $\quad$ کل هزینه کارگاه نوع اول $= (۲+۱) \times L \times W = ۳ \times ۰/۸۷ \times ۳۴/۸۶ = ۹۰/۹۸۴۶$

مدل نوع دوم $M/M/1$ است ،

$\lambda = \frac{1}{۴۰}$ کامیون در دقیقه

$\mu = \frac{1}{۱۵}$ کامیون در دقیقه

متوسط تعداد کامیون $\quad L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\frac{1}{۴۰}}{\frac{1}{۱۵} - \frac{1}{۴۰}} = \frac{۲۴}{۴۰} = ۰/۶$

زمان انتظار هر کامیون $\quad W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{۱۵} - \frac{1}{۴۰}} = ۲۴$ دقیقه

دلار $\quad$ کل هزینه کارگاه نوع دوم $= (۲+x) \times L \times W = ۹۰/۹۸۴۶$

$= (۲+x) \times ۰/۶ \times ۲۴ = ۹۰/۹۸۴۶$

$= (۲+x) \times ۱۴/۴ = ۹۰/۹۸۴۶ \Rightarrow ۲۸/۸ + ۱۴/۴x = ۹۰/۹۸۴۶$

$= ۱۴/۴x = ۶۲/۱۸۴۶ \Rightarrow x = ۴/۳۱۸۴$ دلار

هزینه عملیاتی در هر دقیقه برای کارگاه نوع دوم ۴/۳۱۸۴ $ است.

تمرین ۳۴-۲ کتاب نظریه صف صفحه ۱۸۰

شرکت نفتی فولرهیر عملیات تخلیه نفت خام در پالایشگاه اصلی را به عهده دارد. بندر شش محل تخلیه و چهار تیم تخلیه کننده دارد. تانکرها مطابق فرآیند پواسن با میانگین یکی در هر ۲ ساعت وارد می‌شوند. به طور متوسط ۱۰ ساعت طول می‌کشد تا یک تیم تخلیه تانکری را تخلیه کند. تانکرهای منتظر تیم تخلیه، بر مبنای اولین وارده، اولین سرویس شده انتخاب می‌شوند.

الف) به طور متوسط چند تانکر در بندر است؟

ب) به طور متوسط یک تانکر چه زمانی را در بندر صرف می‌کند؟

ج) نرخ ورود متوسط به وسیله شناور چقدر است؟

د) شرکت احداث محل تخلیه دیگری را در بندر اصلی در دست مطالعه دارد. هزینه‌های ساختمان و تعمیر و نگهداری x دلار در سال است. هدایت یک تانکر به بندر شناور هنگامی که بندر اصلی پر است، دارای هزینه y دلار است. رابطه بین x و y چگونه باشد تا احداث محل تخلیه اضافی در بندر اصلی توجیه پذیر باشد؟

حل: مدل $M/M/C/K$ است $\longrightarrow$ $M/M/4/6$

$C=4$

$K=6$

$\lambda = \frac{1}{2}$ کشتی در ساعت

$E(S) = 10$ ساعت

$\mu = \frac{1}{10}$ کشتی در ساعت

الف)

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{c}\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!}+\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{c}}{c!}\times\sum_{n=c+1}^{K}(\frac{\lambda}{c\mu})^{n-c}} =$$

$$= \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{4}\frac{(5)^n}{n!}+\frac{(5)^4}{4!}\times\sum_{n=5}^{6}(\frac{5}{4})^{n-4}} =$$

$$= \frac{1}{1+5+\frac{25}{2}+\frac{125}{6}+\frac{625}{24}\times(\frac{5}{4}+\frac{25}{16})} \simeq ۰/۰۰۸$$

$$\boxed{P_0 = ۰/۰۰۸}$$

Subject: ۵۲
Year....... Month....... Date.......( )

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \rho}{c!(1-\rho)^2}\left(1-\rho^{K-c}-(K-c)\rho^{K-c}(1-\rho)\right) =$$

$$= \frac{(۰/۰۰۸)\times ۵^۴ \times \frac{۵}{۴}}{۲۴\times\left(1-\frac{۵}{۴}\right)^۲}\left(1-\left(\frac{۵}{۴}\right)^۲-(۲)\left(\frac{۵}{۴}\right)^۲\left(1-\frac{۵}{۴}\right)\right) = ۰/۹$$ تعداد تانکر منتظر تیم تخلیه

$$L = L_q + c - P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c-n)(\rho c)^n}{n!} = ۰/۹ + ۴ - (۰/۰۰۸)\times \sum_{n=0}^{۳} \frac{(۴-n)(۵)^n}{n!}$$

$$= ۰/۹ + ۴ - (۰/۰۰۸)\times\left[۴+۱۵+۲۵+\frac{۱۲۵}{۶}\right] = ۴/۳۸$$ تانکر

$L = ۴/۳۸$ تعداد متوسط تانکر در بندر

ب)

$$\lambda_\alpha = \lambda(1-P_K)$$

$$P_K = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c!\,c^{n-c}}\cdot P_0 \qquad c < n \leq K$$

$$P_۶ = \frac{۵^۶}{۲۴\times۱۶}\times ۰/۰۰۸ = ۰/۳۳$$

$$\lambda_\alpha = \lambda(1-P_K) = \frac{1}{۲}\times(1-۰/۳۳) = ۰/۳۳۵$$

$$W = \frac{L}{\lambda_\alpha} = \frac{۴/۳۸}{۰/۳۳۵} = ۱۳$$ ساعت متوسط زمانی که یک تانکر در بندر صرف می‌کند.

نرخ ورود متوسط به وسیله شناور $= \lambda P_K = \lambda \times P_۶ = \frac{1}{۲}\times ۰/۳۳ = ۰/۱۶۵$ تانکر در ساعت

ادامه در صفحه ۵۳

ت) در صورت افزودن اسکله جدید مدل $M/M/4/7$ می شود.

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{c} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c!} \times \sum_{n=c+1}^{k} \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{n-c}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{4} \frac{(5)^n}{n!} + \frac{(5)^n}{4!} \times \sum_{n=5}^{7} \left(\frac{5}{4}\right)^{n-c}} =$$

$$= \frac{1}{1 + 5 + \frac{25}{2} + \frac{125}{6} + \frac{625}{24} \times \left(\frac{5}{4} + \frac{25}{16} + \frac{125}{64}\right)} = 0.003$$

$$P_K = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c!\, c^{n-c}} \cdot P_0 \qquad c < n \leq k$$

$$P_7 = \frac{(5)^7}{24 \times 4^3} \times 0.003 = 0.15259$$

تعداد تانکرهایی که به بندر شناور می آیند $= \lambda P_K = \frac{1}{2} \times P_7 = \frac{1}{2} \times 0.15259 = \%0.076295$

حالت دوم - حالت اول = اختلاف تعداد تانکرهایی که به سواحل می روند در دو حالت

$= 0.165 - \%0.076295 = 0.088705$

تعداد کشتی ها در طول یک سال $= \%0.088705 \times 24 \times 365 = 777.06$

رابطه بین x و y: $x < 777.06\, y$

Subject: ۵۴

Year .... Month. .... Date .... ( )

تمرین ۵-۲۵ کتاب نظریه صف صفحه ۱۷۹

شرکت کامپیوتر که تجهیزات پردازش داده الکترونیک (EDP) را اجاره می دهد نیاز به تعمیرات اساسی تجهیزات خود یک بار در سال دارد. طرح ۱: تهیه دو ایستگاه تعمیر و نگهداری جداگانه است که در آن تمام کار با دست انجام می شود و هزینه سالانه کل آن ۱۵۰۰۰۰ دلار است. زمان تعمیر و نگهداری برای یک ماشین توزیع نمایی با میانگین ۶ ساعت است. طرح ۲: تهیه یک ایستگاه تعمیر و نگهداری با تجهیزات اتوماتیک است و هزینه سالانه آن ۲۰۰۰۰۰ دلار است. زمان حالت زمان تعمیر برای یک ماشین دارای توزیع نمایی با میانگین ۳ ساعت است. در مورد هر دو طرح، ماشین ها مطابق توزیع پواسن با نرخ ورودی یکی در هر ۸ ساعت وارد می شوند. هزینه زمان بیکاری هر ماشین ۳۰ دلار در ساعت است. شرکت باید کدام طرح را انتخاب کند؟ امکانات تعمیر و نگهداری همواره باز است و $(۲۴)(۳۶۵) = ۸۷۶۰$ ساعت در سال کار می کند.

حل: طرح ۱ دارای مدل M/M/2 است. ۱۵۰۰۰۰ = هزینه سالیانه

$\lambda = \frac{1}{۸}$ ماشین در ساعت $\qquad E(S) = ۶$ ساعت

$\mu = \frac{1}{۶}$ ماشین در ساعت $\qquad \rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{۳}{۸}$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \times \frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{(\frac{۳}{۴})^n}{n!} + \frac{(\frac{۳}{۴})^۲}{۲!} \times \frac{1}{1-\frac{۳}{۸}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{۳}{۴} + \frac{۹}{۳۲} \times \frac{۸}{۵}} = \frac{۵}{۱۱} \Rightarrow \boxed{P_0 = \frac{۵}{۱۱}}$$

$$L_q = P_0 \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \times \rho \frac{1}{(1-\rho)^۲} = (\frac{۵}{۱۱}) \frac{(\frac{۳}{۴})^۲}{۲!} \times (\frac{۳}{۸}) \frac{1}{(1-\frac{۳}{۸})^۲} = \frac{۲۷}{۲۲۰}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{۲۷}{۲۲۰}}{\frac{1}{۸}} = \frac{۵۴}{۵۵} \text{ ساعت}$$

$$W = W_q + E(S) = \frac{۵۴}{۵۵} + ۶ = ۶{,}۹۸ \text{ ساعت}$$

$$L = \lambda . W = \frac{1}{۸} \times ۶{,}۹۸ = ۰/۸۷ \text{ ماشین}$$

Sunwood

Subject: ۵۵

Year...... Month...... Date...... ( )

هزینه سالیانه = $L \times W \times$ هزینه بیکاری هر ماشین $\times 8760 + 15000$

$= 0/87 \times 6/98 \times 30 \times 8760 + 15000 = 1745879$ دلار

حال طرح دوم را بررسی می‌کنیم ← مدل M/M/1

$\lambda = \frac{1}{8}$ ماشین در ساعت $\qquad \mu = \frac{1}{3}$ ماشین در ساعت

هزینه بیکاری هر ماشین = ۳۰ دلار

هزینه سالیانه = ۲۰۰۰۰۰ دلار

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{8}} = \frac{24}{5} = 4/8 \text{ ساعت}$$

$$L = \lambda . W = \frac{1}{8} \times 4/8 = \frac{3}{5} = 0/6 \text{ ماشین}$$

هزینه سالیانه = $L \times W \times$ هزینه بیکاری هر ماشین $\times 8760 + 200000 =$

$= 0/6 \times 4/8 \times 30 \times 8760 + 200000 = 956864$ دلار

Sunwood

Subject: ۵۶

Year ...... Month. ...... Date. ......( )

تمرین ۳-۴۲ کتاب نظریه صف صفحه ۱۸۴

یک جنگلشویی که با شبکه کاری کند ۵ ماشین دارد. هر ماشین مطابق فرآیند پواسن با میانگین نرخ خرابی یکی در روز از کار می افتد. یک تعمیرکار می تواند یک ماشین را مطابق توزیع نمایی با متوسط زمان تعمیر نصف یک روز، رفع عیب کند. در حال حاضر ۳ تعمیرکار مشغول هستند. مدیر مایل بجای سه تعمیرکار از یک تعمیرکار استفاده کند. که دستمزدش با کل دستمزد سه تعمیرکار فعلی برابر است. وی قادر است یک ماشین را در یک سوم زمان رفع عیب کند یعنی در $\frac{1}{6}$ روز. آیا این فرد به کار گرفته شود.

حل: مدل حالت اول $M/M/3/5/5$ است.

$\lambda = 1$ ماشین در روز $\qquad c = 3$

$E(S) = \frac{1}{2}$ روز $\qquad \mu = 2$ ماشین در روز $\qquad K = 5$

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{K!}{(K-n)!\,n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=c}^{K} \frac{K!}{(K-n)!\,c^{n-c}\,c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]} =$$

$$= \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{2} \frac{5!}{(5-n)!\,n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=3}^{5} \frac{5!}{(5-n)!\,3^{n-3}\times 3!}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]} =$$

$$= \frac{1}{(1+2/5+2/5+1/25+0/4167+0/0694)} = 0/129 \Rightarrow \boxed{P_0 = 0/129}$$

$$L = P_0\left[\sum_{n=0}^{c-1} n\binom{K}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{c!}\sum_{n=c}^{K} n\binom{K}{n}\frac{n!}{c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] =$$

$$= 0/129\left[\sum_{n=0}^{2} n\binom{5}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3!}\sum_{n=3}^{5} n\binom{5}{n}\frac{n!}{3^{n-3}}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] =$$

Subject: ۵۷

Year....... Month....... Date....... ( )

ماشین $L = 0.129\,(0 + 2.5 + 5 + 3.75 + 1.6668 + 0.347) = 1.71$

$\boxed{L = 1.71 \text{ ماشین}}$ تعداد ماشین های خراب درون سیستم تعمیر

تعداد ماشین های سالم در حال کار $K - L = 5 - 1.71 = 3.29$

$$W = \frac{L}{\lambda\alpha} = \frac{L}{\lambda(K-L)} = \frac{1.71}{3.29} = 0.5197 \text{ روز}$$

$\boxed{W = 0.5197 \text{ روز}}$ → ارزش انتظاری زمان از کارافتادگی ماشینی که نیاز به تعمیر دارد

اکنون مدل حالت دوم یعنی M/M/1/5/5 را بررسی می کنیم:

$\lambda = 1$ ماشین در روز $\qquad E(S) = \frac{1}{6}$ روز $\qquad C = 1$

$\mu = 6$ ماشین در روز $\qquad K = 5$

$$\cancel{P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{K!}{(K-n)!\,n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=c}^{K} \frac{K!}{(K-n)!\,c^{n-c}\,c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]}}$$

$$P_0 = \frac{1}{\left[1 + \sum_{n=1}^{K} \frac{K!}{(K-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]} = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{5} \frac{5!}{(5-n)!}\left(\frac{1}{6}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{1 + 0.83 + 0.55 + 0.278 + 0.0926 + 0.01543} = 0.3615$$

ادامه در صفحه ۵۸

Subject: ۵۸

Year. Month. Date. ( )

$L = K - \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0) = ۵ - ۶(1 - ۰/۳۶۱۵) = ۱/۱۶۹$ ماشین

$\boxed{L = ۱/۱۶۹ \text{ ماشین}}$ تعداد ماشین های خراب درون سیستم تعمیر

$K - L = ۵ - ۱/۱۶۹ = ۳/۸۳۱$ تعداد ماشین های سالم در حال کار

$w = \frac{L}{\lambda \alpha} = \frac{L}{\lambda(K-L)} = \frac{۱/۱۶۹}{۳/۸۳۱} = ۰/۳۰۵$ روز

$\boxed{w = ۰/۳۰۵ \text{ روز}}$ ارزش انتظار زمان از کار افتادگی ماشین که نیاز به تعمیر دارد.

Sunwood

تمرین ۲-۴۴ کتاب نظریه صف صفحه ۱۸۵

فرض کنید در تمرین ۲-۴۴ هر یک از ~~ماشین~~ ۵ ماشین در یک کارگاه معین مطابق قانون پواسن با نرخ متوسط یکی در هر ۱۰ ساعت از کار بیفتد، و ماشین های از کار افتاده یکی در هر زمان به وسیله دو تعمیرکار که به صورت دو کانال کار می کنند تعمیر شوند. به طوریکه هر ماشین به طور متوسط نیاز مند ۵ ساعت برای سرویس است (نمایی).

الف) احتمال اینکه دقیقاً یک ماشین در هر زمان سالم باشد؟

ب) اگر کارآیی کارگر بوسیله نسبت متوسط زمان انتظار به متوسط زمان سرویس اندازه گیری شود، این معیار برای موقعیت فعلی چقدر است.

ج) اگر یک ماشین یدکی مشابه در نظر گرفته شود، پاسخ بند (الف) چه خواهد بود.

حل: مدل $M/M/۲/۵/۵$ $\lambda = \frac{1}{10}$ ماشین در ساعت

$\mu = \frac{1}{5}$ ماشین در ساعت $E(S) = ۵$ ساعت

الف) احتمال اینکه یکی سالم باشد یعنی ۴ ماشین تعمیر خراب باشد.

$$\cancel{P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{k} \frac{k!}{(k-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}}$$

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{k!}{(k-n)!\,n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=c}^{k} \frac{k!}{(k-n)!\,c^{n-c}\,c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]} =$$

$$= \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{1} \frac{۵!}{(۵-n)!\,n!}\left(\frac{1}{۲}\right)^n + \sum_{n=۲}^{۵} \frac{۵!}{(۵-n)!\,۲^{n-۲}\,۲!}\left(\frac{1}{۲}\right)^n\right]}$$

$$= \frac{1}{(1 + ۲/۵ + ۲/۵ + ۱/۸۷۵ + ۰/۹۳۷۵ + ۰/۲۳۴۳)} = ۰/۱۱۰۵$$

$$\boxed{P_0 = ۰/۱۱۰۵}$$

Sunwood

ادامه در صفحه ۶۰

Subject: ۱۰

Year........ Month........ Date........( )

$$P_n = \frac{k!}{(k-n)!\, c^{n-c}\, c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \times P_0 =$$

$$P_4 = \frac{5!}{(5-4)!\, 2^{4-2} \times 2!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 0/1105 = 0/0359375$$ احتمال اینکه ۴ ماشین سالم باشند

ب)

$$\omega = \frac{L}{\lambda\alpha} = \frac{L}{\lambda(k-L)}$$

$$L = P_0 \left[\sum_{n=0}^{c-1} n \binom{k}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{c!} \sum_{n=c}^{k} n \binom{k}{n} \frac{n!}{c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right] =$$

$$= 0/1105 \left[\sum_{n=0}^{1} n \binom{5}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2!} \sum_{n=2}^{5} n \binom{5}{n} \frac{n!}{2^{n-2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] =$$

$$L = 0/1105\,(0 + 2/5 + 5 + 5/625 + 2/75 + 1/171875) = 1/9942$$ ماشین

$$\omega = \frac{L}{\lambda\alpha} = \frac{L}{\lambda(k-L)} = \frac{1/9942}{0/1(5-1/9942)} = 6/634$$ ساعت

$$\text{کارآیی} = \frac{\omega}{E(s)} = \frac{6/634}{5} = 1/3268$$

ج) در این حالت مدل M/M/2,6,6 است.

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{k!}{(k-n)!\,n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=c}^{k} \frac{k!}{(k-n)!\, c^{n-c}\, c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]} =$$

Subject: ٦١

Year........ Month........ Date........ ( )

$-/.۶۲$

$$P_0 = \cfrac{1}{\sum_{n=0}^{2} \frac{4!}{(4-n)!\,n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=c}^{4} \frac{4!}{(4-n)!\,2^{n-2}\,2!}\left(\frac{1}{2}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{1+3+3/75+2/81+1/41+.35} = \%0.62 \qquad \boxed{P_0 = \%0.62}$$

احتمال اینکه یک ماشین سالم باشد یعنی ۵ ماشین دیگر خراب باشد..

$$P_5 = \frac{k!}{(k-n)!\,c^{n-c}\,c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \times P_0 = \frac{4!}{(4-5)!\,2^{5-2}\times 2!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \%0.62$$

$$P_5 = 1/41 \times \%0.62 = \%0.87$$

Sunwood

۶۱۴۰

Subject: ۷۲

Year. Month. Date. ( )

alizadeh.zr@gmail.com

Sunwood

۲- توضیحات

٤٦-۲

$M/M/2/\infty \quad \lambda' = \mu\lambda = 5/30 = 1/4 \quad \mu = 1/3 \quad C = 2$

$P_0 = M/M/C$ جدول $= /19 \quad L = M/M/C = /53$ نفر

وقتی ۱۰ ماشین داریم $\quad M h = 1/3 \rightarrow \lambda = 1/30 \quad \mu = 1/3 \quad M = 10 \quad C = 2 \quad M/M/2/10/10$

$P_0 = M/M/C/K/K = [1 + 1 + /1 + /015 + /0008 + 7/5 \times 10^{-5} + 22/5 \times 10^{-6} + \dots]^{-1} = \boxed{/4979}$

$L = \quad " \quad = \frac{}{} /4999 [0 + 1 + /2 + 4/5 \times 10^{-3} + /00022 + \dots] = \boxed{1/0.28\,43}$

$\lambda = \mu h = 1/3 \quad \mu = 1/3 \quad M/M/2/\infty$

$P_0 = M/M/C$ جدول $= 1/3 \quad L = M/M/C$ جدول $= 1/44$

وقتی ۵ ماشین داریم $\quad M\lambda = 1/3 \rightarrow \lambda = 1/15 \quad \mu = 3 \quad M/M/2/5/5$

برای مدل دقیق $\quad P_0 = M/M/C/K/K$ جدول $= [1 + 1 + /4 + /03 + 3 \times 10^{-3} + 11/5 \times 10^{-5}]^{-1} = \boxed{/4999}$

$L = \quad " \quad = /41099 [1 + /8 + /9 + 12 \times 10^{-3} + 75 \times 10^{-5}] = /782$

برای مدل تقریبی $\quad M\lambda = \lambda = 1/3 \quad \mu = 1/3 \quad M/M/2/\infty$

$P_0 \; M/M/C$ جدول $= [1 + 1 + \dots] = 1/3 \quad L = 1/44$

نفر با

$= ٫٠٢٤٩[\ldots + ٢٫١٥ + ٥ + ٣٫٧٥ + ١٫٤٤٩٨ + ٫٣٤٧] = ١٫٧١$ ماشین

$$W = \frac{L}{\lambda(M-L)} = \frac{١٫٧١}{٥-١٫٧١} \simeq \boxed{٫٥١٩٧ \text{ روز زمان انتظار}}$$

مدل ٢ $M/M/1/5/5$

$$P_0 = [1 + ٫٨٣ + ٫٥٥ + ٫٢٧٨ + ٫٠٩٢٤ + ٫٠١٥٤٣]^{-1} = \boxed{٫٣٤١٥}$$

$$L = M - \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0) = ٥-٦(١-٫٣٤١٥) = \boxed{١٫١٤٩ \text{ ماشین}}$$

$$W = \frac{L}{\lambda(M-L)} = \frac{١٫١٤٩}{٥-١٫١٤٩} \simeq \boxed{٫٣٠٥ \text{ روز}}$$

$\boxed{٤٤-٢}$ ✓ مدل $M/M/2/5/5$ $\quad \lambda = ٫١$ مورد/ساعت $\quad \mu = 1/5$ مورد/ساعت $\quad \lambda/\mu = ٫٥$

الف) احتمال اینکه یکی سالم باشد یعنی ٤ تا زیر خراب $= P_4 =$ فرمول $= \binom{5}{n}\frac{n!}{2^{n-2}\,2!}(٫٥)^n P_0$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{1}\binom{5}{n}٫٥^n + \sum_{n=2}^{5}\binom{5}{n}\frac{n!}{2^{n-2}\,2!}(٫٥)^n\right]^{-1} = [1 + ٢٫٥ + ٢٫٥ + ١٫٨٧٥ + ٫٩٣٧٥ + ٫٢٣٤٣]^{-1} \simeq \boxed{٫١١٠٥}$$

$$P_4 = \frac{5!}{4!(5-4)!} \times \frac{4!}{2^2 \times 2}(٫٥)^4 \times ٫١١٠٥ \simeq \boxed{٫١٠٣٥٩٦٧}$$

ب) زمان انتظار $= W = \frac{L}{\lambda(\mu-L)} = \frac{١٫١٩٩٤٢}{٫١(٥-١٫١٩٩٤٢)} \simeq \boxed{٤٫١٤٣٤}$ ساعت

$$L = P_0[0 + ٢٫٥ + ٥ + ٥٫٦٢٥ + ٦٫٧٥ + ١٫١٧١٨٧٥] \simeq \boxed{١٫١٩٩٤١٧٩٧} \text{ ماشین}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(M-L)} = \frac{٫٤١٣}{٫١(٥-١٫١٩٩)} \simeq \boxed{١٫٠٦} \text{ ساعت}$$

$$L_q = ١٫١٩٩ - ٢ + ٫١١٠٥(٢ + ٢٫٥) = \boxed{٫٤١٣} \text{ ماشین}$$

$$\text{نسبت} = \frac{W}{E(S)} = \frac{٤٫١٤٣٤}{٥} = \boxed{١٫٠٢٦٨}$$

ج) $y = 1$ تنها ماشین یدکی $\quad P_4 = \frac{M^y M!}{(M-n+y)!\,C^{n-C}\,C!}(\lambda/\mu)^n P_0$

$$= \frac{5 \times 5!}{(5-4+1)!\,2^{4-2} \times 2!}(٫٥)^4 \times ٫١١٠٥ \simeq \boxed{٫٢٥٨٩٨٤٣}$$

۳۵-۲

مدل M/M/3/3

$\lambda = 20$ تماس/ساعت

$E(S) = 6/60$ ساعت $\rightarrow \mu = 10$ تماس/ساعت

$70\$$ برای هر سفر

$$P_c = \frac{(\lambda/\mu)^c / c!}{\sum_{i=0}^{c} (\lambda/\mu)^i / i!} \rightarrow P_3 = \frac{2^3/3!}{\sum_{i=0}^{3} \frac{2^i}{i!}} = \frac{8/6}{1+2+2+8/6} = 8/38 = \boxed{4/19}$$

مشتریانی که در طول ۳ ساعت روز نمی‌توانند وارد شوند $= 3\lambda P_c = 3 \times 20 \times 4/19 \cong 12.63$ نفر

تعداد مشتریانی که به جاهای دیگر می‌روند ← نفر $7.578 \cong 12.63 \times \frac{60}{100}$ ⇐ با توجه به اینکه ۶۰٪ به جاهای دیگر می‌روند

زیان ناشی از محدودیت سرور $= 7.578 \times 70\$ = \boxed{530\$}$

اگر مدل M/M/4/4 باشد $\Rightarrow P_4 =$ از فرمول بالا $= \frac{2^4/4!}{\sum_{i=0}^{4} \frac{2^i}{i!}} = \frac{2/3}{1+2+2+8/6+2/3} = 2/3 \times 1/7 = \boxed{\frac{2}{21}}$

مشتریانی که نمی‌توانند وارد شوند در طول ۳ ساعت روز $= 3\lambda P_c = 3 \times 20 \times 2/21 = 5.714$ نفر

$\Rightarrow 5.714 \times \frac{60}{100} = 3.428$ نفر به جاهای دیگر می‌روند

$1 \Longrightarrow$ ضرر حاصل شده $= 3.428 \times 70\$ = 240\$$ ؛ سود افزایش نسبت به حالت اول $= 530 - 240 - 64 = 226\$$

اگر مدل M/M/5/5 باشد $\Rightarrow P_5 =$ از فرمول بالا $= \frac{2^5/5!}{1+2+2+8/6+2/3+4/15} = 4/15 \times \frac{15}{109} = 0.036$

تعداد مشتریانی که نمی‌توانند در طول ۳ ساعت روز وارد شوند $= 3\lambda P_c = 3 \times 20 \times 0.036 = 2.2$ نفر

$\Rightarrow 2.2 \times \frac{60}{100} = 1.3211$ نفر به جاهای دیگر

اپراتور C بیشتر صرف نمی‌کند

ضرر حاصل شده $= 1.3211 \times 70\$ = 92.477\$$

سود افزایش نسبت به حالت اول $= (530 - 92.477) - \underbrace{2 \times 64}_{\text{دستمزد دو کارمند}} = 309.523\$$

✓ **۴۳-۲** M/M/3/5/5 مدل 1

$\lambda = 1$ ماشین/روز $\quad \mu = 2$ ماشین/روز $\quad \lambda/\mu = 0.5$

$C = 3 \quad M = 5$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{2} \binom{5}{n} 0.5^n + \sum_{n=3}^{5} \binom{5}{n} \frac{n!}{3^{n-3} \times 3!} \times 0.5^n\right]^{-1} = [1+2.5+2.5+1.25+0.4167+0.0694]^{-1} \cong \boxed{0.129}$$

$$L = P_0 \left[\sum_{n=0}^{2} n \binom{5}{n} 0.5^n + \frac{1}{3!} \sum_{n=3}^{5} n \binom{5}{n} \frac{n!}{3^{n-3}} 0.5^n\right]$$

۳۴-۲ ادامه

اگر ۴ صندلی اضافه شود $M/M/1/9$

$P_K = P_9 = M/M/1/K$ فرمول $= ٪.۳۸۵۲۲۷$

تعداد مشتریانی که در طول ۶ ساعت روز بدلیل محدودیت نمی توانند وارد شوند $= 6\lambda P_{K=9} = 6 \times 5 \times ٪.۳۸۵۶۲۷ \simeq ۱٫۱۵۵۸۷$

تفاوت مشتری در دو حالت $= ۳٫۰۲۱ - ۱٫۱۵۵۸۷ \simeq ۱٫۸۶۵۳$

سود حاصل از ۳ نفر $= ۱٫۸۶۵۳ \times ۲۵\$ = ۴٫۱۹۷\$$

سود خالص دریافتی $= ۴٫۱۹۷ - ۴$ (هزینه) $= ٪۱۹۷\$$ پس اجاره کند مقرون است.

$\boxed{34-2}$ ✓ $\lambda = 1/2$ گشت/ساعت، $\mu = 1/10$ ساعت، $C = 4$، $K = 6$، $M/M/4/6$، $\rho = 5/4$، $\lambda/\mu = 5$

الف) $P_0 = M/M/C/K$ فرمول $= \left[1 + 5 + \frac{25}{2} + \frac{125}{6} + \frac{5^4}{4!} + \frac{1-(5/4)^3}{1-5/4}\right]^{-1} \simeq \boxed{٪.۰۰۷}$

$L_q = M/M/C/K$ فرمول $= \frac{٪.۰۰۷ \times 5^4 \times 5/4}{24 \times ٪.۰۶۲۵}\left[1 - (5/4)^3 + ٪۲۵ \times 3 \times (5/4)^2\right] \simeq \boxed{٪۸}$ گشت

$L =$ 〃 〃 $= ٪۸ + 4 - ٪.۰۰۷\left[4 + 15 + 25 + \frac{125}{6}\right] \simeq \boxed{٤٫۳۵}$ گشت

ب) $P_6 = M/M/C/K$ فرمول $= \frac{1}{4^2 \times 24} \times 5^6 \times ٪.۰۰۷ \simeq \boxed{٪۲۸}$

$W =$ 〃 〃 $= \frac{٤٫۳۵}{1/2\,(1 - ٪۲۸)} = 12$ ساعت

ج) نرخ ورود توسط پلیس شناور $= \lambda P_K = 1/2\, P_6 = 1/2 \times ٪۲۸ = ٪۱۴$ گشت/ساعت

د) در صورت افزودن اسکله جدید $M/M/4/7$

$P_0 = M/M/C/K$ فرمول $= \left[1 + 5 + \frac{25}{2} + \frac{125}{6} + \frac{5^4}{4!} \times \frac{1-(5/4)^4}{1-5/4}\right]^{-1} \simeq \boxed{٪.۰۰۵}$

$P_7 = M/M/C/K$ فرمول $= \frac{1}{4^3 \times 4!}\, 5^7 \times ٪.۰۰۵ \simeq \boxed{٪۲۵۴۳۱۳}$

$\simeq \boxed{٪۱۲۷۱۵۷}$

تعداد گشت که به شناور می روند $= \lambda P_K = 1/2 \times P_7 = 1/2 \times ٪۲۵۴۳۱۳ \simeq$

اختلاف تعداد گشت هایی که به شناور می روند در حالت اول و دوم $=$ حالت اول $-$ حالت دوم $= ٪۱۴ - ٪۱۲۷۱۵۷ \simeq \boxed{٪.۰۱۲۸۴۳}$

تعداد گشت ها در طول یک سال $= ٪.۰۱۲۸۴۳ \times ۲۴ \times ۳۶۵ = ۱۱۲٫۵۱ \Rightarrow x < ۱۱۲٫۵۱y$

$\boxed{۲۱\_۲}$ $\quad C=۲۵-۲=۲۳ \quad$ مدل $M/M/C \rightarrow M/M/۲۳$

$E(S)=$ ۳ هفته $\Rightarrow \mu = ۱/۲۱$ نیاز/روز $\quad \lambda = \frac{۳۴۷}{۳۶۵}$ نیاز/روز $\quad \lambda/\mu = \frac{۷۲۸۷}{۳۶۵} \quad \rho<۱$

$$W = \frac{1}{\mu} + \left[\frac{(\lambda/\mu)^C \mu}{(c-1)!\,(c\mu-\lambda)^2}\right] P_0 = ۲۱ + \left[\frac{(۷۲۸۷/۳۶۵)^{۲۳} \times ۱/۲۱}{(۲۲!)\left(۲۳/۲۱ - \frac{۳۴۷}{۳۶۵}\right)^۲}\right] \times ۱٫۷۴ \times ۱۰^{-۹} = ۲۳٫۸۴$$

$$\frac{(\lambda/\mu)^{c+1} P_0}{c!\,c\,(1-\rho)^2}$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{1}{n!}(\lambda/\mu)^n + \frac{1}{c!}(\lambda/\mu)^c \left(\frac{c\mu}{c\mu-\lambda}\right)\right]^{-1}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{۲۲} \frac{1}{n!}\left(\frac{۷۲۸۷}{۳۶۵}\right)^n + \frac{1}{۲۳!}\left(\frac{۷۲۸۷}{۳۶۵}\right)^{۲۳}\left(\frac{۲۳/۲۱}{۲۳/۲۱ - ۳۴۷/۳۶۵}\right)\right]^{-1} = ۱٫۷۴ \times ۱۰^{-۹}$$

$\boxed{۲۲\_۲}$ $\quad E(S)=۲۸$ دقیقه $\Rightarrow \mu=۱۵$ مش/روز $\quad \lambda=۲۱$ مش/روز $\quad$ مدل $M/M/C$

برای تعادل در $M/M/C \rightarrow \rho = \frac{\lambda}{c\mu} < ۱ \Rightarrow c > \frac{\lambda}{\mu} = \frac{۲۱}{۱۵} = ۱٫۴ \Rightarrow \boxed{C=۲}$

$P(T>۳) < ٪۵ \rightarrow P(t \leq ۳) \geq ٪۹۵$

مدل $M/M/C \rightarrow$ برای $C=۲$ $\Rightarrow$

$$W_q(۳) = \frac{(\lambda/\mu)^C\left(1-e^{-(\mu C-\lambda)t}\right)}{(c-1)!\,(c-\lambda/\mu)} P_0 + 1 - \frac{c(\lambda/\mu)^C}{c!\,(c-\lambda/\mu)} P_0$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}(\lambda/\mu)^n + \frac{1}{c!}(\lambda/\mu)^c\left(\frac{c\mu}{c\mu-\lambda}\right)\right]^{-1} = \left[۱+۱٫۴+\frac{۱٫۴^۲}{۲}\left(\frac{۳۰}{۳۰-۲۱}\right)\right]^{-1} \simeq ٪۱۷۶۴۷$$

$$W_q(۳) = \frac{۱٫۴^۲\left(1-e^{-۹\times ۳/۷}\right)}{۲-۱٫۴} \times ٪۱۷۶۴۷ + ۱ - \frac{۲\times ۱٫۴^۲}{۲} \times ٪۱۷۶۴۷ \simeq ٪۹۸۷۸$$

چون از ۹۵ بزرگتر است $\Rightarrow$ قابل قبول است $\Rightarrow \boxed{C=۲}$

برای $C=۳$ $\quad P_0 =$ از فرمول بالا $= \left[۱+۱٫۴+\frac{۱٫۴^۲}{۲}+\frac{1}{۳!}(۱٫۴)^۳\left(\frac{۴۵}{۴۵-۲۱}\right)\right]^{-1} \simeq ٪۲۳۵۹۹$

$$W_q(۳) = \frac{۱٫۴^۳\left(1-e^{-۲۴\times ۳/۷}\right)}{۲(۳-۱٫۴)} \times ٪۲۳۵۹۹ + ۱ - \frac{۳(۱٫۴)^۳}{۳!\,(۳-۱٫۴)} \times ٪۲۳۵۹۹$$

$= ٪۹۹۹۹ \Rightarrow$ حالت $C=۲$ کافی است

تمرین ۲-۱۱ $\lambda = ۱۰$ نفر/ساعت، $\mu = ۱۵$ نفر/ساعت

الف) احتمال تشکیل صف $= 1-(P_0+P_1) = 1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9}$

$$\begin{cases} P_0 = 1-\rho = \frac{1}{3} \\ P_1 = \rho(1-\rho) = \frac{2}{9} \end{cases}$$

ب) $L_q = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \dfrac{10^2}{15\times 5} = \frac{100}{75} = \frac{4}{3}$ نفر

ج) $W = \dfrac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{5}$ ساعت $= ۱۲$ دقیقه

د) $P_r(T>5) = 1 - P_r(T\leq 5) = \rho e^{-t/W} = \frac{2}{3} e^{-5/12} = 0/439$

ه) تعداد دو رشته‌هایی که می‌تواند تصحیح کند در یک ساعت $= 22 \times P_0 = \frac{22}{3} = 7/73 \Rightarrow$ در هر شیفت کاری ورقه‌های قابل تصحیح $= 7/33 \times 8 = 58/64$ مقاله

$\boxed{۱۲-۲}$ ✓ مدل $M/M/1$ $\lambda = ۳$ اتومبیل/روز

$\mu_1 = \frac{24}{7}$ اتومبیل/روز $\mu_2 = ۴$ اتومبیل/روز

$۵\$$ = هزینه هر اتومبیل که در گاراژ باقی بماند $۷۵\$$ = هزینه ثابت تعمیرات کاربرد

$L_1 = \dfrac{\lambda}{\mu_1-\lambda} = 7$ $W_1 = \dfrac{1}{\mu_1-\lambda} = \dfrac{1}{\frac{24}{7}-3} = \frac{7}{3}$ روز

$L_2 = \dfrac{\lambda}{\mu_2-\lambda} = 3$ $W_2 = \dfrac{1}{\mu_2-\lambda} = \frac{1}{4-3} = 1$ روز

سود از دست رفته حالت اول $= L_1 W_1 \times 5\$ = 7\times \frac{7}{3}\times 5 \simeq 80\$$

دوم " " " $= L_2W_2 \times 5\$ = 3\times 1\times 5 = 15\$$

هزینه کل برای سیستم اول $= 75 + 80 = 155\$$

دوم " " $= 75 + 15 = 90\$$

اختلاف $= 155 - 90 = 65\$$ می‌تواند افزایش یابد

$\boxed{۱۳-۲}$

هزینه عملیات رنگ‌کاری = هزینه ثابت + هزینه رنگ‌کاری برای هر ماشین

$$R = \mu C_2 + \frac{C_1}{\mu-\lambda} \to R' = 0 \to C_2 + \frac{-C_1}{(\mu-\lambda)^2}$$

?✗

$$= \frac{C_2(\mu-\lambda)^2 - C_1}{(\mu-\lambda)^2} = 0 \to \mu = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} + \lambda$$

$\boxed{۲۵-۲}$

مدل ۱ طرح $M/M/2/\infty$

هزینه سالیانه $= 15000\ \$$

$\mu = 1/4$ ماشین/ساعت $\quad \lambda = 1/8$ ماشین/ساعت

هزینه بیکاری هر ماشین $= 30\ \$/$ساعت $\quad \boxed{C=2}$

$\lambda/\mu = 2/4$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{1}{n!}(\lambda/\mu)^n + \frac{1}{C!}(\lambda/\mu)^C\left(\frac{C\mu}{C\mu-\lambda}\right)\right]^{-1}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!}(2/4)^n + 1/2(2/4)^2\left(\frac{1/2}{1/2-1/8}\right)\right]^{-1} = \frac{5}{11}$$

$$W = \frac{1}{\mu} + \left[\frac{(\lambda/\mu)^C \mu}{(C-1)!\,(C\mu-\lambda)^2}\right]P_0 = 4 + \left[\frac{(2/4)^2\ 1/4}{(1/2-1/8)^2}\right] \times \frac{5}{11} \simeq 4/2 \text{ ساعت}$$

$L = \lambda W = 1/8 \times 4/2 = /78$ ماشین

هزینه سالانه $= L \times W \times$ هزینه بیکاری هر ماشین $\times 8760 + 15000$

$= /78 \times 4/2 \times 30 \times 8760 + 15000 = 1414606$ دلار

مدل ۱ طرح $M/M/1/1/\infty$

هزینه سالانه $= 200000\ \$$

$\mu = 1/3$ ماشین/ساعت $\quad \lambda = 1/8$ ماشین/ساعت

هزینه بیکاری هر ماشین $= 30\ \$/$ساعت

$\lambda/\mu = 3/8$

$W = \dfrac{1}{\mu-\lambda} = \dfrac{1}{1/3 - 1/8} = \dfrac{24}{5} = 4/8$ ساعت

$L = \lambda W = 1/8 \times 4/8 = /6$ ماشین

هزینه سالانه $= L \times W \times$ هزینه بیکاری هر ماشین $\times 8760 + 200000$

$= /6 \times 4/8 \times 30 \times 8760 + 20000$

$= 956864\ \$$

$\boxed{۳۲-۲}$ مدل $M/M/1/1/10$ $\quad \rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = 4$

$\lambda = 20$ ماشین/ساعت

$E(S) = 12$ دقیقه $\Rightarrow \mu = \dfrac{60}{12} = 5$ ماشین/ساعت

$$P_K = \frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{K+1}} \Rightarrow P_{10} = \frac{-3 \times 4^{10}}{1-4^{11}}$$

$$= \frac{3145728}{4194303} \simeq /75$$

تعداد ماشینهایی که در ۱۰ ساعت روز نمی توانند وارد کارگاه شوند $= 10\lambda P_K = 10 \times 20 \times /75 = 150$ ماشین

$\boxed{۳۳-۲}$ $\quad \lambda = 5$ نفر/ساعت $\quad \rho = 5/6$

$\mu = 6$ نفر/ساعت

در حالت اول $M/M/1/5 \rightarrow P_5 = M/M/5/K$ فرمول $= \dfrac{1/6 \times 5/6^5}{1-(5/6)^6} = /1007$

تعداد مشتریانی که در طول ۶ ساعت روز نمی توانند وارد شوند به دلیل محدودیت $= 6 \times \lambda \times P_5 = 6 \times 5 \times /1007 \simeq 3/21$ مشتری

۲۳-۲ ✓

سیستم اول $M/M/1$

$\lambda = ۲۰$ نفر/ساعت $\quad \mu = ۳۰$ نفر/ساعت

$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{۲۰}{۳۰ - ۲۰} = ۲ \Rightarrow$ تعداد افراد موجود $= ۲\times۲ = ۴$ نفر

$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{۳۰-۲۰} = ۰/۱$ ساعت $= ۶$ دقیقه

احتمال اینکه یک مشتری بیش از ۵ دقیقه منتظر بماند $= P_r(Tq > ۵) = 1 - P_r(Tq \leq ۵)$

$= 1 - (1 - \rho e^{-t/w}) = \rho e^{-t/w} = ۲/۳\, e^{-۵/۶} = \boxed{۰/۲۹}$

$P_0 = 1 - \rho = 1 - ۲/۳ = \boxed{۱/۳}$

احتمال بیکاری هر سرویس دهنده $= P_0 + ۱/۲\, P_1 = ۱/۹ + ۱/۲ \times ۱/۶ \times ۱/۹ = ۰/۱۱ + ۰/۰۹ \simeq \boxed{۰/۲}$

$P_1 = \frac{\lambda^1}{1!\mu^1} P_0 = ۱/۶ \times ۱/۹$

روش دوم $= 1 - \frac{\lambda}{c\mu} = 1 - \frac{۴۰}{۵۰} = 1 - ۰/۸ = \boxed{۰/۲}$

سیستم دوم $M/M/2$

$\lambda = ۴۰$ نفر/ساعت $\quad \mu = ۲۵$ نفر/ساعت $\quad c = ۲$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{c!}(\lambda/\mu)^c\left(\frac{c\mu}{c\mu - \lambda}\right)\right]^{-1} = \left[1 + ۱/۶ + ۰/۵ \times ۱/۶^۲\left(\frac{۵۰}{۵۰-۴۰}\right)\right]^{-1} = \boxed{۱/۹}$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu} + \left[\frac{(\lambda/\mu)^c \lambda\mu}{(c-1)!(c\mu - \lambda)^2}\right] P_0 = ۱/۶ + \left[\frac{۱/۶^۲ \times ۴۰ \times ۲۵}{۱۰۰}\right] \times ۱/۹ \simeq ۴/۴ \text{ نفر}$$

$W = L/\lambda = \frac{۴/۴}{۴۰} = ۰/۱۱$ ساعت $= \boxed{۶/۶}$ دقیقه

احتمال اینکه یک مشتری بیش از ۵ دقیقه منتظر بماند $= P_r[Tq > ۵] = 1 - P_r(Tq \leq ۵)$?

$$P_r(Tq \leq ۵) = Wq(t) = \frac{(\lambda/\mu)^c(1 - e^{-(\mu c - \lambda)t})}{(c-1)!(c - \lambda/\mu)} P_0 + 1 - \frac{c(\lambda/\mu)^c}{c!(c - \lambda/\mu)} P_0$$

$$= \frac{۱/۶^۲(1 - e^{-۱۰ \times ۵/۶۰})}{۲ - ۱/۶} \times ۱/۹ + 1 - \frac{۲ \times ۱/۶^۲}{۲(۲ - ۱/۶)} \times ۱/۹ = ۰/۱۴ + 1 - ۰/۷۷ \simeq \boxed{۰/۷}$$

احتمال اینکه بیش از ۵ دقیقه منتظر بماند $= 1 - ۰/۷ = \boxed{۰/۳}$